Münster i/W. 1934. № 5 Phil. Diss.

Philosophie

Untersuchungen zur Grundlegung der Arithmetik mit besonderer Beziehung auf Dedekind, Frege und Russell.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster i W.

vorgelegt von

Friedrich Bachmann
aus Wernigerode a. H.

MÜNSTER I.W. 1934

Druck: Buch- und Steindruckerei Max Kramer, Münster i. Westf., Aegidiistraße Nr. 23

Tag der mündlichen Prüfung: 11. 5. 33
Dekan: Herr Prof. Dr. A. Eitel
Referent: Herr Prof. Dr. D. H. Scholz

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist aus einer Bearbeitung der Preisaufgabe "Der gegenwärtige Stand des Verhältnisses von Logik und Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung des FREGE-RUSSELLschen Aufbaus der Arithmetik" hervorgegangen, die die Philosophische und Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Münster i.W. auf Anregung von Herrn Professor H. SCHOLZ für das Studienjahr 1932/33 gestellt hatte, und ist nach Zuerkennung des Preises im Frühjahr 1933 von der Fakultät auf Vorschlag von Herrn Professor H. SCHOLZ als Dissertation angenommen worden. Ich bin Herrn Professor H. SCHOLZ für Anregung und Förderung zu grossem Dank verpflichtet.

Der Gegenstand der Arbeit ist das Problem der Ableitbarkeit der Arithmetik aus der Logik oder - wie ich mich genauer ausdrücken möchte - das Problem der Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik. Die Lösung dieses Problems besteht in der Lösung von zwei Teilaufgaben:

1) einer logischen Charakterisierung der Modelle der Arithmetik (Angabe eines Axiomsystems der Arithmetik)

2) der logischen Konstituierung eines Modells der Arithmetik (Angabe eines Konstantensystems und Beweis, dass dieses Konstantensystem einem Axiomsystem der Arithmetik genügt).

Die Antwort auf die Frage, ob die Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik beweisbar ist, hängt wesentlich davon ab, welche Logik man zugrunde legt. A.N. WHITEHEAD und B. RUSSELL gelang der Beweis mit Hilfe der in den Principia Mathematica [1] dargestellten Logik nicht; sie mussten ein neues Axiom, das "Unendlichkeits-Axiom" adjungieren. Die vorliegende Arbeit benutzt eine

1) s. Literaturverzeichnis p. 78.

Logik, die man mit einem Schlagwort als Logik der Principia Mathematica ohne (verzweigte und unverzweigte) Typentheorie bezeichnen kann. Diese Logik fusst auf der Analyse der Paradoxien von H.BEHMANN[1]) und wird von H.SCHOLZ in seinen Vorlesungen über Logistik[1]) entwickelt. Mit ihrer Hilfe gelingen Ableitbarkeitsbeweise für verschiedene Interpretationen der Arithmetik.

Im ersten Teil der Arbeit (I. und II. Abschnitt)wird möglichst zielstrebig eine Lösung der beiden Teilaufgaben durchgeführt. Die Lösung der zweiten Teilaufgabe fusst dabei auf den Gedankengängen, die G.FREGE als Programm für den Nachweis, dass "die Arithmetik ein Zweig der Logik ist",in seinen >Grundlagen der Arithmetik<[1]) entworfen und in seinen >Grundgesetzen der Arithmetik< Bd.I[1]) zu einem Beweis von grosser Strenge und Exaktheit entwickelt hat; unsere Lösung stellt einen Versuch dar, auf dieser Basis die langwierigen unzugänglichen FREGEschen Beweise durch übersichtlichere zu ersetzen. Für die erste Teilaufgabe ist im I. Abschnitt eine Lösung angegeben,die für die Überlegungen des II. Abschnitts besonders geeignet ist und eine befriedigende inhaltliche Deutung zulässt.

Im III. Abschnitt werden andere Lösungen der ersten Teilaufgabe angeführt und einige allgemeine Untersuchungen zur Axiomatik der Arithmetik angestellt. Der IV. Abschnitt ist der Beurteilung und dem Vergleich der FREGEschen Konstituierung der Arithmetik und der Konstituierung der Arithmetik in den Principia Mathematica gewidmet. Der Abschnitt schliesst damit, dass relativ zu unserer Logik die Identität der Interpretation der Arithmetik in den Principia Mathematica mit der Interpretation, die im II. Abschnitt dargestellt ist, bewiesen wird.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

I. Abschnitt. Das Problem der Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik.

§ 1. Ein Axiomsystem der Arithmetik (A-AS I) 1

§ 2. Deutung des Axiomsystems A-AS I 1

§ 3. Was ist unter der Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik zu verstehen? 6

II. Abschnitt. Logische Konstituierung eines Modells der Arithmetik.

§ 4 Definition der Kardinalzahl 10

§ 5. Definition der Null, der Vorgängerrelation und der Menge der natürlichen Zahlen 13

§ 6. Beweis der Mehreindeutigkeit der Vorgängerrelation 18

§ 7. Beweis für die Wiederholungsfreiheit der Zahlenfolge 20

§ 8. Beweis für das Nicht-Abbrechen der Zahlenfolge 23

III. Abschnitt. Zur Axiomatisierung der Arithmetik.

§ 9. Das Dedekind-AS der Arithmetik 27

§ 10. Deutung des Dedekind-AS 30

§ 11. Beweis der Äquivalenz des Dedekind-AS mit A-AS I 31

§ 12. Das Peano-AS der Arithmetik 37

§ 13. Axiomsysteme der Arithmetik mit nur zwei oder einer freien Variablen (A-AS II) 40

§ 14. Das "Axiom der vollständigen Induktion" 45

IV. Abschnitt. Freges Interpretation der Arithmetik und die Interpretation der Arithmetik in den Principia Mathematica.

§ 15. Freges Ableitbarkeitsbeweis 53

§ 16. Die Interpretation der Arithmetik in den Principia Mathematica 57

§ 17. Vergleich der Interpretation der Arithmetik in den Principia Mathematica mit unserer 63

Anhang I. Die R-Vorfahr-Relationen 70

Anhang II. Zusammenstellung der verwendeten Symbole und Abkürzungen 75

Literaturverzeichnis 78

I. Abschnitt.

Das Problem der Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik.

§ 1. Ein Axiomsystem der Arithmetik (A-AS I).

Als ein Axiomsystem der Arithmetik benutzen wir das folgende System von Aussageformen:

A-AS I.

A1. $\alpha 1 R \varepsilon cls \rightarrow 1$

A2. $\alpha = \mathcal{N}_R{}'x$

A3. $y \varepsilon \alpha \rightarrow_y z \; yRz$

A4. $y \varepsilon \alpha \rightarrow_y \overline{y \; R_{po} y}$

Unser Axiomsystem besteht also aus vier Aussageformen, in denen ausser Konstanten der Logik und gebundenen Veränderlichen die drei freien Veränderlichen x R α auftreten; dabei ist

x Leerstelle für einen Gegenstand
R Leerstelle für eine zweistellige Relation
α Leerstelle für eine Klasse.[1)]

Jedes Wertetripel, das in x R α eingesetzt die Axiome in wahre Aussagen überführt, heisst ein Modell der Arithmetik.

§ 2. Deutung des Axiomsystems A-AS I.

Wir wollen uns zunächst inhaltlich verdeutlichen, welche Anforderungen die Axiome A1 bis A4 an die freien Veränderlichen x R α stellen, oder, anders ausgesprochen, wie

1) wegen der verwendeten Symbole vgl. Anhang II.

die Modelle der Arithmetik aussehen. Zur Beantwortung dieser Frage benutzen wir den folgenden Satz 4 über die Nachkommenschaft[1] eines Elementes a hinsichtlich einer Relation P, dem wir drei Hilfssätze vorausschicken:

Satz 1. Die P-Nachkommenschaft von a ist identisch mit dem Durchschnitt aller P-erblichen Mengen, in denen a liegt.

Denn die P-Nachkommenschaft von a besteht laut Definition aus den Elementen, die in jeder P-erblichen Menge liegen, in der a liegt. Diese Elemente bilden aber gerade den Durchschnitt aller P-erblichen Mengen, in denen a liegt.

Satz 2. Die P-Nachkommenschaft von a ist eine P-erbliche Menge.

Symbolisiert:

$$\vdash u \varepsilon \mathcal{N}_P{}'a \wedge uPv \to_{uv} v \varepsilon \mathcal{N}_P{}'a \ .$$

Inhaltlich klar; der formale Beweis folgt aus $S_A 21$. Dieser Satz ist ein Spezialfall des allgemeineren, dass der Durchschnitt von P-erblichen Mengen stets wieder eine P-erbliche Menge ist.

Satz 3. Die P-Nachkommenschaft von a ist die kleinste P-erbliche Menge, in der a liegt.

Folgt aus Satz 1 und 2.

Satz 4. (Nur von inhaltlicher Bedeutung). Ist die Relation P für die Nachkommenschaft von a mehreindeutig $((\mathcal{N}_P{}'a)\,{}^1P \varepsilon \mathrm{cls} \to 1)$, so ist die P-Nachkommenschaft von a identisch mit den Elementen der Reihe:

a, der P-Nachfolger von a[2], der P-Nachfolger des P-Nachfolgers von a, ...

(wobei zugelassen ist, dass die Reihe abbricht).

Denn da die P-Nachkommenschaft von a eine P-erbliche Menge ist (Satz 2), enthält sie mit jedem Element dessen P-Nachfolger (solange ein solcher existiert), enthält sie also mindestens die Elemente der vorstehenden Reihe. Und da sie die kleinste P-erbliche Menge ist, in der a liegt (Satz 3), so enthält sie höchstens diese Elemente.

1) Vgl. Anhang I.

2) >der P-Nachfolger von a< symbolisiert: $\breve{P}'a$

Bezeichnen wir die Reihe

a, P'a, P'P'a, ...

die mit a beginnt, in der auf jedes Element höchstens eines folgt (die also eventuell abbricht), in der zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Elementen, und nur zwischen ihnen die Relation P besteht, und in der jedes Element von a aus in endlich vielen P-Schritten erreichbar ist, als die mit a beginnende P-Folge, so lässt sich Satz 4 auch so aussprechen:

Satz 4 (Zweite Fassung). Ist die Relation P für die P-Nachkommenschaft von a mehreindeutig, so bildet die P-Nachkommenschaft von a die mit a beginnende P-Folge.

Dieser Satz gestattet uns, zunächst die beiden ersten Axiome so auszusprechen:

Die Elemente von α bilden die mit x beginnende R-Folge.

Da A1 und A2 sichern, dass α die mit x beginnende R-Folge ist, nennen wir A1 und A2 die Folgen-konstituierenden Axiome.

A3 und A4 stellen dagegen zwei Forderungen an die durch A1 und A2 konstituierte Folge: A3 besagt, dass die R-Folge nicht abbricht; nämlich, dass zu jedem Element der R-Folge ein R-Nachfolger existiert. A4 besagt, dass man in der R-Folge von einem Element y ausgehend niemals nach endlich vielen R-Schritten wieder auf y stösst; da nun jedes Element der R-Folge vom Anfangselement in endlich vielen R-Schritten erreichbar ist, bedeutet das, dass man von y ausgehend niemals wieder auf y stösst. A4 besagt also, dass in der R-Folge keine Wiederholungen auftreten.

Wir können also das ganze A-AS I(x R α) inhaltlich so formulieren:

Die Elemente von α bilden die nicht-abbrechende, wiederholungsfreie mit x beginnende R-Folge.

und den Satz aufstellen:

Satz 5. Ein System von Konstanten x' R' α' ist dann und nur dann ein Modell der Arithmetik, wenn die Elemente von α' die nicht-abbrechende, wiederholungsfreie mit x'

beginnende R'-Folge bilden; oder ausführlicher: wenn sich die Elemente von α' in eine nicht-abbrechende, wiederholungsfreie mit x' beginnende Reihe ordnen lassen, in der zwischen je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Elementen, und nur zwischen ihnen die Relation R' besteht, und in der jedes Element von x' aus in endlich vielen R'-Schritten erreichbar ist.

Es sollen jetzt einige Systeme x' R' α' angegeben werden, die Modelle der Arithmetik sind, und einige, die nicht Modelle der Arithmetik sind.

Das bekannteste Modell der Arithmetik ist:

M1 x' = die Null (0)
R' = die Relation von n zu n+1 ($\hat{x}\hat{y}$ y = x+1, die "Vorgängerrelation": Vg)
α' = die Menge der natürlichen Zahlen (nz)

Belastet man die freien Veränderlichen von A-AS I durch diese (im anschaulichen Sinne zu verstehenden) Konstanten, so geht A-AS I in das folgende System von Aussagen über:

A-AS I'.

A1. $nz^{1}Vg \varepsilon cls \rightarrow 1$

A2. $nz = \mathcal{N}_{Vg}{}'0$

A3. $y \varepsilon nz \rightarrow_{y} \dot{z}\ yVgz$

A4. $y \varepsilon nz \rightarrow_{y} \overline{y\ Vg_{po}y}$

Nach Satz 4 sichern nun A1 und A2, dass die Menge der natürlichen Zahlen identisch ist mit den Elementen der Reihe

0, 0+1, (0+1)+1, ...

und A3 besagt, dass diese Reihe nicht abbricht, und A4, dass in ihr kein Element zweimal auftritt.

Andere Modelle sind:

M2 x' = 37
R' = Vg
α' = die Menge der natürlichen Zahlen, die grösser oder gleich 37 sind

M3 $x' = 1$
R' = die Relation zwischen n und der kleinsten Primzahl, die grösser als n ist.
α' = die Menge der Primzahlen.

M4 $x' = 1$
R' = die Relation zwischen n und n/2
α' = die Menge der Zahlen $1/2^m$, $m = 0,1,2,\ldots$

Neben diesen Zahlenfolgen sind auch Folgen von Raum- oder Zeitpunkten, von Kugeln oder Kreisen u.s.f. Modelle der Arithmetik.

Es ist wesentlich, sich neben den Modellen der Arithmetik einige inhaltliche Belastungen von $x\ R\ \alpha$ zu vergegenwärtigen, die nicht Modelle sind, um zu erkennen, welche Forderungen die einzelnen Axiome stellen. Nicht-Modelle sind z.B.

$\overline{M}1$ $x' = 0$
R' = die Relation zwischen n und n+1 oder n+2
$(\hat{x}\hat{y}\ y = x+1 \vee y = x+2)$
α' = die Menge der natürlichen Zahlen.

In $\overline{M}1$ ist A1 nicht erfüllt. A2-4 sind erfüllt.

$\overline{M}2$ $x' = 0$
R' = die Relation zwischen einer Ordnungszahl und der nächstfolgenden
α' = die Menge der Ordnungszahlen.

$\overline{M}3$ $x' = 0$
$R' = Vg$
α' = die Menge aller positiven rationalen Zahlen.

$\overline{M}2$ und $\overline{M}3$ sind Belastungen, für die A2 nicht, wohl aber A1.3.4 erfüllt sind; die in ihnen auftretenden Mengen sind nicht die Nachkommenschaft der Elemente x' hinsichtlich der angegebenen Relationen. (Für die Menge der positiven rationalen Zahlen lässt sich aber, wie im Beweis für die "Abzählbarkeit" dieser Menge gezeigt wird, eine Relation angeben, sodass sie mit der Nachkommenschaft der Null

hinsichtlich dieser Relation identisch wird. Für die Menge aller Ordnungszahlen existiert eine solche Relation nicht.)

$\overline{M4}$ $\quad x' = 0$
$\quad R' = Vg$
$\quad \alpha' = [\ 0,1,2,3\ ]$

die mit x' beginnende R'-Folge heisst: 0,1,2,3. A3 ist nicht erfüllt, während A1.2.4 erfüllt sind.

$\overline{M5}$ $\quad x' = 0$
$\quad R' = 0 \downarrow 1\ 0\ 1 \downarrow 0$
$\quad \alpha' = [\ 0,1\ ]$

die mit x' beginnende R'-Folge heisst: 0,1,0,1,... A4 ist nicht erfüllt, während A1-3 erfüllt sind.

§ 3. Was ist unter der Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik zu verstehen?

Def. 1. Eine Aussage p heisst aus der Logik ableitbar (beweisbar, deduzierbar) oder eine Aussage der Logik, wenn sich eine (endliche) Schlusskette angeben lässt, die von den Axiomen der Logik zu p führt und in der jedes Glied aus dem vorhergehenden grundsätzlich[1] durch Anwendung der Einsetzungs-, der Abtrennungs- oder der Quantifizierungsregel gewonnen werden kann.

Def. 2. Unter der ausgezeichneten Darstellung der Arithmetik verstehen wir

1) A-AS $I(x\ R\ \alpha)$
2) die Gesamtheit der Aussageformen $L(x\ R\ \alpha)$, für die gilt, dass

$$\text{A-AS } I(x\ R\ \alpha) \rightarrow_{xR\alpha} L(x\ R\ \alpha)$$

eine Aussage der Logik ist.

Die Aussageformen $L(x\ R\ \alpha)$ heissen die Lehrsätze der ausgezeichneten Darstellung der Arithmetik.

1) Zur Theorie des logischen Schliessens vgl. HILBERT-BERNAYS, Grundlagen der Mathematik I, §§ 3.4.

Def. 3. Ein System von Aussageformen in gewissen Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ nennen wir eine Darstellung der Arithmetik, wenn

1) es sich aufspalten lässt in zwei Klassen K_1 (Klasse der Axiome) und K_2 (Klasse der Lehrsätze), sodass, wenn $A(u_1, u_2, \ldots u_n)$ die Konjunktion der Aussageformen aus K_1 ist, eine Aussageform $B(u_1, u_2, \ldots u_n)$ dann und nur dann K_2 angehört, wenn

$$A(u_1, u_2, \ldots u_n) \rightarrow_{u_1 u_2 \ldots u_n} B(u_1, u_2, \ldots u_n)$$

eine Aussage der Logik ist.

2) ein System rein logischer Ausdrücke in den Veränderlichen $x\ R\ \alpha$: $U_1(xR\alpha), U_2(xR\alpha), \ldots U_n(xR\alpha)$ existiert, sodass bei Ersetzung der $u_1, u_2, \ldots u_n$ durch die $U_1, U_2, \ldots U_n$ die generelle Äquivalenz

$$A(U_1(xR\alpha), U_2(xR\alpha), \ldots U_n(xR\alpha)) \leftrightarrow_{xR\alpha} A\text{-AS } I(x\ R\ \alpha)$$

aus der Logik ableitbar ist.

Für zwei Darstellungen D_1 und D_2 der Arithmetik, von denen eine die ausgezeichnete sein kann, gilt der

Satz 1. Transformiert man in der in Def. 3 angegebenen Weise die Variablen in D_1 in die Variablen von D_2, so unterscheiden sich D_1 und D_2 nur noch durch die Reihenfolge der in ihnen auftretenden Aussageformen; nach der Transformation auf gleiche Variablen tritt also jede Aussageform, die in D_1 als Axiom oder Lehrsatz auftritt, auch in D_2 als Axiom oder Lehrsatz auf und umgekehrt.

Def. 4. Unter der Arithmetik verstehen wir die Gesamtheit der Aussageformen, die eine (oder, was nach Satz 1 dasselbe bedeutet: jede) Darstellung der Arithmetik ausmachen ohne Rücksicht auf ihr Auftreten als Axiom oder Lehrsatz und ohne Rücksicht auf die spezielle Wahl der Variablen.

Def. 5. Falls die drei Konstanten x', R', α' ein Modell der Arithmetik (s. § 1) bilden, so nennen wir die Gesamtheit der Aussagen, in die die Aussageformen, aus denen die ausgezeichnete Darstellung der Arithmetik besteht, bei Belastung der freien Veränderlichen $x\ R\ \alpha$ durch $x'\ R'\ \alpha'$ übergehen, eine Interpretation der Arithmetik.

Präziser müssten wir, statt von einem Modell, bzw. einer Interpretation der Arithmetik von einem Modell, bzw. einer Interpretation der ausgezeichneten Darstellung der Arithmetik sprechen. Die kürzeren Ausdrucksweisen sind jedoch zulässig, da sich nach Def. 3 und Satz 1 die Variablen jeder anderen Darstellung mit rein logischen Mitteln durch die Variablen der ausgezeichneten Darstellung ausdrücken lassen. Daher ist durch jedes Modell der ausgezeichneten ein Modell einer beliebigen Darstellung und also auch durch jede Interpretation der ausgezeichneten eine Interpretation einer beliebigen Darstellung festgelegt.

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, dass die Ableitbarkeit der Arithmetik aus der Logik gewiss nicht behauptet werden kann. Denn die Arithmetik ist nach Def. 4 ein System von Aussageformen, und die Ableitbarkeit von Aussageformen aus der Logik ist mit der Ableitbarkeit der Behauptung der Allgemeingültigkeit dieser Aussageformen aequivalent. Dass diese Aussageformen nicht allgemeingültig sind, ist aber trivial (vgl. die Nicht-Modelle in § 2). Wir behaupten daher nur die Ableitbarkeit gewisser Interpretationen der Arithmetik aus der Logik.

Für den Beweis der Ableitbarkeit wenigstens einer Interpretation ist offenbar notwendig und hinreichend, dass die Existenz eines Modells der Arithmetik, also der Satz

$$\dot{\mathfrak{x}}\ \dot{\mathfrak{R}}\ \dot{\alpha}\ \text{A-AS}\ \mathfrak{I}(\mathfrak{x}\ \mathfrak{R}\ \alpha)$$

aus der Logik beweisbar ist. Diesen Existenzsatz werden wir im Folgenden so beweisen, dass wir

1) in den §§ 4.5 drei Konstanten $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{R}'$, α' angeben, von denen wir

2) in den §§ 6-8 unter ausschliesslicher Benutzung der Beweismittel der Logik zeigen, dass sie A-AS $\mathfrak{I}(\mathfrak{x}\ \mathfrak{R}\ \alpha)$ befriedigen.

Damit die Lösung der zweiten Aufgabe gelingt, ist notwendig, dass die drei Konstanten aus den Grundzeichen der Logik und gebundenen Variablen aufgebaut, kurz: dass sie logische Konstanten sind. Eine Aussage über ausserlogische Konstanten ist nämlich nur dann aus der Logik ableitbar, wenn sie bei Ersetzung der Konstanten durch Variable in ei-

ne allgemeingültige Aussageform übergeht. Da nun die Aussageformen A-AS I(x R α) nicht allgemeingültig sind, ist dieser Weg nicht gangbar.

Wir wollen nun nicht nur ein beliebiges Modell angeben, sondern ein Modell, das die Eigenschaft hat, dass bereits durch die Definition von α das Zählen "endlicher" Mengen, d.h. die mehreindeutige Zuordnung der "endlichen" Mengen zu den Elementen von α gegeben ist, kurz: ein Modell, dessen Elemente als Kardinalzahlen definiert sind. Stellt man diese zusätzliche Forderung nicht so gibt es ziemlich triviale Modelle, deren Modellcharakter sich leicht logisch beweisen lässt. Ein solches Modell ist das Konstanten-Tripel $\wedge$, P, $\mathfrak{A}_P$'$\wedge$, wo P $=_{df}$ m̂n̂ [m] = n . Nun lässt sich zwar allgemein für ein beliebiges Modell der Arithmetik die Zuordnung der "endlichen" Mengen zu den Elementen des Modells angeben (s. R.DEDEKIND, Zahlen § 14). Wir bevorzugen jedoch Modelle, die das Zählen ermöglichen, ohne dass man davon Gebrauch macht, dass sie Modelle sind, d.h. ohne dass man über ein Axiomsystem der Arithmetik geht. An diese Modelle stellen wir nun noch die weitere Forderung, dass die durch die Definition von α gegebene Zuordnung der "endlichen" Mengen zu den Elementen von α die Eigenschaft hat, dass einer Menge mit n Elementen (im anschaulichen Sinne) das n+1-te Element (im anschaulichen Sinne) der mit x beginnenden R-Folge zugeordnet wird (vgl. Vorbemerkung zu § 5).

Ein logisch konstituiertes Modell, das den beiden zusätzlichen Forderungen genügt, betrachten wir als eine logische Erfassung der natürlichen Zahlen. Wir sprechen daher im Folgenden (§§ 4.5) nicht von der Angabe eines Modells, sondern von der Definition

der Null (0)
der Menge der natürlichen Zahlen (oder genauer: der Menge der endlichen Kardinalzahlen, nz)
der Relation von n zu n+1 (unmittelbarer Vorgänger in der Folge der natürlichen Zahlen, Vg)

und werden dann von ihren Definientien nachweisen, dass sie ein Modell der Arithmetik bilden.

II. Abschnitt.

Logische Konstituierung eines Modells der Arithmetik[1].

§ 4. Definition der Kardinalzahl.

Da wir die natürlichen Zahlen als die endlichen Kardinalzahlen definieren wollen, brauchen wir zunächst eine Definition der Kardinalzahl, die aus rein logischem Material aufgebaut sein muss. Um sie aufzustellen, gehen wir vom Begriff der Gleichmächtigkeit aus, der sich ohne Benutzung des Kardinalzahlbegriffs durch den Begriff der eineindeutigen Abbildbarkeit zweier Mengen aufeinander erfassen lässt.

Zwei Mengen α und β sollen gleichmächtig (symbolisiert: $\alpha \,\mathrm{glm}\, \beta$) heissen, wenn ein Korrelator von α und β existiert. Dabei nennen wir eine Relation R einen Korrelator von α und β (symbolisiert: $\alpha >R< \beta$), wenn R jedem Element aus α genau ein Element aus β, die Konverse von R jedem Element aus β genau ein Element aus α und R sonst nichts einander zuordnet; oder: wenn R eineindeutig, der Vorbereich von R mit α und der Nachbereich von R mit β identisch ist.

D4.1 $\quad \alpha >R< \beta =_{df} \alpha = D'R \wedge R \varepsilon 1 \rightarrow 1 \wedge \breve{C}'R = \beta$

D4.2 $\quad \alpha \,\mathrm{glm}\, \beta =_{df} \dot{R}\, \alpha >R< \beta$

Die Gleichmächtigkeitsrelation ist eine Totalgleichheit.

Unter einer Totalgleichheit[2] wird eine totalreflexi-

1) Unter dieser Bezeichnung fassen wir die Lösung der beiden Aufgaben 1) Angabe dreier logischer Konstanten x' R' α' und 2) logischer Beweis, dass x' R' α' die Aussageformen A-AS I(x R α) erfüllen, zusammen.

2) R. CARNAP, Logistik 20a.

re, symmetrische und transitive Relation verstanden. Es gelten folgende Sätze:

L4.1 $\vdash \alpha \,\mathrm{glm}\, \alpha$

denn die Identität, beschränkt auf α, ist ein Korrelator von α und α.

L4.11 $\vdash \alpha \,\mathrm{glm}\, \beta \rightarrow \beta \,\mathrm{glm}\, \alpha$

denn ist R ein Korrelator von α und β, so ist $\breve{R}$ ein Korrelator von β und α.

L4.12 $\vdash \alpha \,\mathrm{glm}\, \beta \wedge \beta \,\mathrm{glm}\, \gamma \rightarrow \alpha \,\mathrm{glm}\, \gamma$

denn ist R ein Korrelator von α und β, S von β und γ, so ist R|S ein Korrelator von α und γ

Das Feld einer Totalgleichheit R zerfällt in "Abstraktionsklassen", d.h. elementfremde Bereiche, die stets mit einem Element a die (und nur die) Elemente enthalten die zu a in der Relation R stehen (oder, was wegen der Symmetrie von R dasselbe bedeutet: zu denen a in der Relatron R steht). Den Elementen einer Abstraktionsklasse ist jeweils ein "ideales Objekt" gemein, und so ist durch jede Abstraktionsklasse in bezug auf Gleichmächtigkeit (d.i. Klasse untereinander gleichmächtiger Mengen) eine Kardinalzahl bestimmt. Um das "ideale Objekt" zu fassen, braucht man eine Kennzeichnungsfunktion, die allen Elementen einer Abstraktionsklasse (und nur ihnen) denselben Gegenstand zuordnet. Die einfachste Funktion, die dieser Forderung genügt, ist $\vec{R}$; sie ist für alle Elemente des Feldes von R definiert und ordnet jedem Element einer Abstraktionsklasse die Menge aller Dinge, die zu ihm in der Relation R stehen, d.h. aber gerade die Abstraktionsklasse, in der es liegt, zu. Benutzen wir also $\vec{R}$ als die gesuchte Kennzeichnungsfunktion, so identifizieren wir die "idealen Objekte" mit den Abstraktionsklassen. Diese Identifizierung macht es möglich, mit den Mitteln der Logik die "idealen Objekte" aus der zugrunde liegenden Totalgleichheit, in unserm Falle also die Kardinalzahl aus der Gleichmächtigkeit zu definieren[3].

3) Zum "Abstraktionsprinzip vgl. R. CARNAP, Logistik 20. Ausführlichere Behandlung in einer demnächst erscheinenden Ar-

Dieser Überlegung gemäss definieren wir >die Kardinalzahl von< durch die Kennzeichnungsfunktion $\overrightarrow{\text{glm}}$:

D4.3 $\quad Kz =_{df} \overrightarrow{\text{glm}}$

Daraus ergibt sich, dass die Kardinalzahl, die einer Menge α zukommt, mit der Gesamtheit aller Mengen β identisch ist, die mit α gleichmächtig sind; diese Gesamtheit ist die Abstraktionsklasse in bezug auf Gleichmächtigkeit, in der α liegt.

L4.3 $\quad \vdash \; Kz'\alpha = \hat{\beta}\,\beta \,\text{glm}\, \alpha$

Die Gesamtheit aller Abstraktionsklassen einer Totalgleichheit ist $\hat{\alpha}\,\dot{a}\,\alpha = \vec{R}'a$, oder kurz: $D'\vec{R}$; danach ist die Gesamtheit aller Kardinalzahlen $D'\overrightarrow{\text{glm}}$; wir führen für diese Gesamtheit das Zeichen kz ein:

D4.4 $\quad kz =_{df} D'\overrightarrow{\text{glm}}$

Daraus ergeben sich die Sätze:

L4.4 $\quad \vdash \; kz = \hat{n}\,\dot{\alpha}\, n = \overrightarrow{\text{glm}}'\alpha = \hat{n}\,\dot{\alpha}\, n = Kz'\alpha$

L4.41 $\quad \vdash \; n \in kz \leftrightarrow \dot{\alpha}\, n = Kz'\alpha \leftrightarrow \dot{\alpha}\, n = \overrightarrow{\text{glm}}'\alpha$

"eine Menge von Mengen ist eine Kardinalzahl, wenn eine Menge existiert, deren Kardinalzahl sie ist, oder: wenn sie eine Abstraktionsklasse inbezug auf Gleichmächtigkeit ist."

An diese Definitionen schliessen wir einige Sätze über Gleichmächtigkeit und Kardinalzahl an.

L4.5 $\quad \vdash \; \alpha \,\text{glm}\, \beta \leftrightarrow Kz'\alpha = Kz'\beta$

"zwei Mengen α und β sind dann und nur dann gleichmächtig, wenn die Kardinalzahl von α gleich der Kardinalzahl von β ist."

Beweis von L4.5.
$Kz'\alpha = Kz'\beta$ ist äquivalent mit $\hat{\gamma}\,\gamma \,\text{glm}\, \alpha = \hat{\gamma}\,\gamma \,\text{glm}\, \beta$ oder $\gamma \,\text{glm}\, \alpha \leftrightarrow_{\gamma} \gamma \,\text{glm}\, \beta$, sodass sich der Satz auch so aussprechen lässt:

$$\vdash \; \alpha \,\text{glm}\, \beta \leftrightarrow (\gamma \,\text{glm}\, \alpha \leftrightarrow_{\gamma} \gamma \,\text{glm}\, \beta)$$

beit von H. SCHWEITZER über Definitionen durch Abstraktion,

Dieser Satz zerfällt in die beiden Teilsätze:

$$\vdash \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta \rightarrow (\gamma\,\mathrm{glm}\,\alpha \leftrightarrow_{\gamma} \gamma\,\mathrm{glm}\,\beta) \qquad (1)$$

$$\vdash (\gamma\,\mathrm{glm}\,\alpha \leftrightarrow_{\gamma} \gamma\,\mathrm{glm}\,\beta) \rightarrow \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta \qquad (2)$$

Der Beweis von (1) besteht im Nachweis von

$$\vdash \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta \rightarrow (\gamma\,\mathrm{glm}\,\alpha \rightarrow \gamma\,\mathrm{glm}\,\beta) \qquad (a)$$

und $$\vdash \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta \rightarrow (\gamma\,\mathrm{glm}\,\beta \rightarrow \gamma\,\mathrm{glm}\,\alpha) \qquad (b)$$

wovon (a) aus der Transitivität, (b) aus der Symmetrie und Transitivität der Gleichmächtigkeitsrelation folgt.

Beweis von (2): Aus dem Implikans folgt, dass jede mit α gleichmächtige Menge auch mit β gleichmächtig ist. Nun ist wegen der Totalreflexivität der Gleichmächtigkeitsrelation α mit sich selbst gleichmächtig, also auch α mit β gleichmächtig. -

L4.51 $\vdash \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta \leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Kz}'\beta$

Dieser Satz ist eine direkte Folgerung aus unserer Definition der Kardinalzahl einer Menge: $\alpha \in \mathrm{Kz}'\beta$ bedeutet $\alpha \in \overrightarrow{\mathrm{glm}}'\beta$ und das ist mit $\alpha\,\mathrm{glm}\,\beta$ äquivalent.

L4.52 $\vdash \alpha \in \mathrm{Kz}'\beta \leftrightarrow \mathrm{Kz}'\alpha = \mathrm{Kz}'\beta$

folgt aus L4.5.51.

L4.53 $\vdash n \in \mathrm{kz} \rightarrow (\alpha \in n \leftrightarrow_{\alpha} \mathrm{Kz}'\alpha = n)$

Beweis von L4.53.

Aus L4.52 folgt $\vdash n = \mathrm{Kz}'\beta \rightarrow (\alpha \in n \leftrightarrow_{\alpha} \mathrm{Kz}'\alpha = n)$ und also auch $\vdash (\dot{\beta}\, n = \mathrm{Kz}'\beta) \rightarrow (\alpha \in n \leftrightarrow_{\alpha} \mathrm{Kz}'\alpha = n)$; gemäss L4.41 gewährleistet $n \in \mathrm{kz}$ die Wahrheit des Implikans.

§ 5. Definition der Null, der Vorgängerrelation und der Menge der natürlichen Zahlen.

Vorbemerkung (Nur von inhaltlicher Bedeutung). In diesem Paragraphen werden die natürlichen Zahlen als die

endlichen Kardinalzahlen definiert. Kardinalzahlen sind Mengen gleichmächtiger Mengen; um den Anschluss an den Gebrauch der natürlichen Zahlen des täglichen Lebens zu gewinnen, soll die Definition der einzelnen natürlichen Zahlen so eingerichtet werden, dass die natürliche Zahl n die Klasse aller der Mengen ist, die im gewöhnlichen Sinn n Elemente haben. Nach dem Satz von der Abbildung der Zahlenreihe durch Induktion[1] ist, um dies zu erreichen, notwendig und hinreichend, dass man

1) die Null als die Menge aller leeren Mengen definiert

2) die Vorgängerrelation so definiert, dass eine Menge von Mengen dann und nur dann Vorgänger einer zweiten ist, wenn die Mengen der ersten ein Element weniger als die Mengen der zweiten enthalten.

I. Definition der Null.

Die Null definieren wir als die Klasse aller Mengen, die mit der Nullmenge gleichmächtig sind, oder (L4.3) als die Kardinalzahl der Nullmenge:

D5.1 $\quad 0 =_{df} \mathrm{Kz}'\Lambda$

Da es eine Menge, nämlich die Nullmenge, gibt, deren Kardinalzahl 0 ist, ist 0 gemäss L4.41 eine Kardinalzahl:

L5.1 $\quad \vdash 0 \varepsilon \mathrm{kz}$

Die Leerheit der Nullmenge, die als die Menge der x definiert ist, die von sich selbst verschieden sind, ist rein logisch beweisbar (*24.105); weiter lässt sich zeigen, dass alle leeren Mengen und nur sie mit der Nullmenge gleichmächtig sind:

L5.11 $\quad \vdash \alpha \,\mathrm{glm}\, \Lambda \leftrightarrow \sim \mathring{x}\, x \varepsilon \alpha$

Beweis von L5.11.

$\vdash \alpha = \beta \rightarrow \alpha \,\mathrm{glm}\, \beta$ folgt aus der Totalreflexivität von glm , L4.1

also $\quad \vdash \alpha = \Lambda \rightarrow \alpha \,\mathrm{glm}\, \Lambda$

1) R. DEDEKIND, Zahlen 126; vgl. SCHOLZ-BACHMANN, Grundlagen der Arithmetik, § 14.

und nach *24.15: $\vdash \sim\dot{x}\ x \in \alpha \rightarrow \alpha\ \mathrm{glm}\ \Lambda$ (1)

Es gilt $\vdash \alpha >R< \Lambda \rightarrow \sim\dot{x}\ x \in \alpha$ (2)
denn aus $\alpha >R< \Lambda$ folgt $\breve{C}'R = \Lambda$ und daraus, da der Vorbereich einer Relation dann und nur dann die Nullmenge ist, wenn der Nachbereich die Nullmenge ist: $D'\breve{R} = \Lambda$; ferner $\alpha = D'R$, ist $\alpha = \Lambda$ und also gilt nach *24.15: $\sim\dot{x}\ x \in \alpha$. - Aus (2) folgt

$$\vdash (\dot{R}\ \alpha >R< \Lambda) \rightarrow \sim\dot{x}\ x \in \alpha \qquad (3)$$

(1) und (3) ergeben den Satz.

Die Null ist durch D5.1 als die Klasse der mit der Nullmenge gleichmächtigen Mengen definiert, nach L5.11 ist diese Klasse mit der Klasse aller leeren Mengen identisch; es gilt also

L5.12 $\vdash 0 = \hat{\alpha} \sim\dot{x}\ x \in \alpha$

Die Definition der Null genügt also der in der Vorbemerkung dieses Paragraphen erhobenen Forderung: die Null ist die Menge aller Mengen, die kein Element haben.

Da jede leere Menge nach *24.15 mit der Nullmenge identisch ist, ist die Menge der leeren Mengen mit der Einerklasse $[\Lambda]$ identisch. Es gilt also:

L5.13 $\vdash 0 = [\Lambda]$

Aus L5.11 ergibt sich mit Hilfe von L4.5:

L5.14 $\vdash Kz'\alpha = 0 \leftrightarrow \sim\dot{x}\ x \in \alpha$.

II. Definition der Vorgängerrelation.

Die Relation >m ist ein Vorgänger von n< definieren wir so: Es gibt eine Menge α , deren Kardinalzahl n ist, und ein Element x in α , sodass m die Kardinalzahl der Menge $\alpha - [x]$ ist, die aus α entsteht, wenn x herausgenommen wird. In Zeichen:

D5.2 $mVgn =_{df} \dot{\alpha}\ \dot{x}\ Kz'\alpha = n \wedge x \in \alpha \wedge Kz'\alpha - [x] = m$

Aus dieser Definition ergibt sich sofort, dass die Relation Vg nur zwischen Kardinalzahlen besteht:

L5.2 $\vdash$ C'Vg $\subset$ kz

Es ist zu beachten, dass das Definiens von mVgn nicht so lautet: nimmt man aus einer beliebigen Menge α, deren Kardinalzahl n ist, ein beliebiges Element x heraus, so ist m die Kardinalzahl der Restmenge $\alpha - [x]$. Diese Aussageform wäre so zu symbolisieren:

$$\tilde{\alpha}\,\tilde{x}\ \mathrm{Kz}'\alpha = n \wedge x \in \alpha \rightarrow \mathrm{Kz}'\alpha - [x] = m \qquad (1)$$

Das Verhältnis der beiden Forderungen ist folgendes: (1) garantiert nicht, dass m und n Kardinalzahlen sind und dass α wenigstens ein Element enthält; um das sicherzustellen, hat man

$$\mathring{\alpha}\,\mathring{x}\ \mathrm{Kz}'\alpha = n \wedge x \in \alpha \qquad (2)$$

zu (1) hinzuzufügen. Bildet man die Konjunktion von (1) und (2), so erhält man ein Äquivalent zum Definiens von D5.2, das man also auch zur Definition der Vorgängerrelation benutzen kann; es gilt also folgender Satz:

L5.21 $\vdash$ mVgn $\leftrightarrow$ $(\dot{\beta}\,\dot{y}\ \mathrm{Kz}'\beta = n \wedge y \in \beta)$

$\wedge\,(\mathrm{Kz}'\beta = n \wedge y \in \beta \rightarrow_{y\beta} \mathrm{Kz}'\beta - [y] = m)$

Während es sehr leicht einzusehen ist, dass die neue Bedingung hinreichend dafür ist, dass m ein Vorgänger von n im Sinne von D5.2 ist, braucht man, um ihre Notwendigkeit zu zeigen, den nicht trivialen Satz L7.21, den wir unten beweisen werden.

Beweis von L5.21.

rechts $\rightarrow$ links: folgt aus $\vdash$ $(\dot{u}v\,\varphi uv) \wedge (\varphi uv \rightarrow_{uv} \psi uv) \rightarrow \dot{u}v\,\varphi uv \wedge \psi uv$

links $\rightarrow$ rechts: in L7.21 ersetze man $\mathrm{Kz}'\alpha = \mathrm{Kz}'\beta$ gemäss:

$\vdash$ $\mathrm{Kz}'\alpha = n \wedge \mathrm{Kz}'\beta = n \rightarrow \mathrm{Kz}'\alpha = \mathrm{Kz}'\beta$

und $\mathrm{Kz}'\alpha - [x] = \mathrm{Kz}'\beta - [y]$ gemäss

$\vdash$ $\mathrm{Kz}'\alpha - [x] = \mathrm{Kz}'\beta - [y] \rightarrow (\mathrm{Kz}'\alpha - [x] = m \rightarrow \mathrm{Kz}'\beta - [y] = m)$

So erhält man

$\vdash$ $\mathrm{Kz}'\alpha = n \wedge x \in \alpha \wedge \mathrm{Kz}'\alpha - [x] = m \wedge \mathrm{Kz}'\beta = n \wedge y \in \beta$

$\rightarrow \mathrm{Kz}'\beta - [y] = m$

daraus folgt

$$\vdash (\dot{\alpha}x\ Kz'\alpha = n \wedge x \varepsilon \alpha \wedge Kz'\alpha - [x] = m)$$
$$\cdot\rightarrow\cdot\ Kz'\beta = n \wedge y \varepsilon \beta \rightarrow {}_{y\beta} Kz'\beta - [y] = m \qquad (3)$$

Trivial ist

$$\vdash (\dot{\alpha}\dot{x}\ Kz'\alpha = n \wedge x \varepsilon \alpha \wedge Kz'\alpha - [x] = m)$$
$$\rightarrow \dot{\beta}\dot{y}\ Kz'\beta = n \wedge y \varepsilon \beta \qquad (4)$$

(3) und (4) ergeben, was zu beweisen war.

III. Definition der Menge der natürlichen Zahlen.

Es leuchtet ein, dass es mit Hilfe der Null und der Vorgängerrelation gelingt, für jede einzelne endliche Kardinalzahl eine Definition anzugeben. Man kann 1 als die Kardinalzahl definieren, zu der 0 in der Vg-Relation steht, 2 als die Kardinalzahl, zu der 1 in der Vg-Relation steht, u.s.w. Um diese Definitionen zu legitimieren, ist nur der Nachweis der Mehreindeutigkeit der Vg-Relation und der Nachweis für die Existenz wenigstens eines Vg-Nachfolgers notwendig, die wir beide unten erbringen werden.

Will man aber beweisen, dass man bei jeder endlichen Kardinalzahl mit einer solchen Definitionskette zum Ziel kommt, so braucht man eine Definition des Begriffs der endlichen Kardinalzahl, über die wir bisher noch nicht verfügen. Wir nehmen die Eigenschaft, die diese Definitionsketten möglich macht, nämlich die Eigenschaft, dass die endlichen Kardinalzahlen in endlich vielen Vg-Schritten von der Null aus erreichbar sind, als Definitionseigenschaft. Diese Eigenschaft ist durch den Begriff der R-Vorfahrrelation (vgl. Anhang I) auf die logischen Grundbegriffe zurückgeführt.

Wir bezeichnen aus der Menge der Kardinalzahlen diejenigen als endliche Kardinalzahlen oder natürliche Zahlen, die in der Vg-Nachkommenschaft der 0 liegen.

D5.3 $\quad nz =_{df} \mathcal{N}_{Vg}'0$

Wir benutzen also die Beziehung $nz = \mathcal{N}_{Vg}'0$, die ge-

mäss A2 zwischen 0 Vg nz bestehen muss, wenn sie ein Modell der Arithmetik bilden sollen, als Definition von nz. Da allgemein auf eine R-Nachkommenschaft eines Elements stets die Schlussweise der vollständigen Induktion angewendet werden darf, folgt aus unserer Definition von nz unmittelbar, dass man diese Schlussweise auf die Menge der natürlichen Zahlen anwenden darf. Aus der Identität D5.3 ergibt sich nämlich die Inklusion $nz \subset \mathcal{N}_{Vg}{}'0$, und das bedeutet ausführlicher geschrieben:

L5.3 $\vdash 0 \varepsilon \alpha \wedge (u \varepsilon \alpha \wedge uVgv \rightarrow {}_{uv}v \varepsilon \alpha) \rightarrow_{\alpha} nz \subset \alpha$

"die Menge der natürlichen Zahlen ist in jeder Vg-erblichen Menge enthalten, der die Null angehört".

Auf Grund von D5.3 lässt sich leicht der Nachweis erbringen, dass die Menge der natürlichen Zahlen in der Menge der Kardinalzahlen enthalten ist:

L5.31 $\vdash nz \subset kz$

das folgt daraus, dass Null eine Kardinalzahl und dass das Feld von Vg in der Klasse der Kardinalzahlen enthalten ist.

Beweis von L5.31.
Nach *91.54, ist $\vdash \mathcal{N}_{Vg}{}'0 = [0] \cup \overleftarrow{Vg}_{po}{}'0$

1) $\vdash 0 \varepsilon kz$ (L5.1) ergibt $\vdash [0] \subset kz$

2) $\vdash \overleftarrow{Vg}_{po}{}'0 \subset kz$ lässt sich so zeigen:

$$\vdash \overleftarrow{Vg}_{po}{}'0 \subset \mathfrak{C}'Vg_{po} \underset{S_A 14}{\subset} \mathfrak{C}'Vg \underset{L5.2}{\subset} kz$$

§ 6. Beweis der Mehreindeutigkeit der Vorgängerrelation.

Statt des Erfülltseins von A1:

L6.1 $\vdash nz1Vg \varepsilon cls \rightarrow 1$

beweisen wir den stärkeren Satz:

L6.2 $\vdash Vg \varepsilon cls \rightarrow 1$.

Die wichtigste Stütze für den Beweis von L6.2 ist der Satz

L6.21 $\vdash \mathrm{Kz}'\alpha - [x] = \mathrm{Kz}'\beta - [y] .\rightarrow. x \varepsilon \alpha \wedge y \varepsilon \beta \rightarrow \mathrm{Kz}'\alpha = \mathrm{Kz}'\beta$

"wenn die Kardinalzahl von $\alpha - [x]$ gleich der Kardinalzahl von $\beta - [y]$ ist, so ist auch die Kardinalzahl von α gleich der Kardinalzahl von β, falls x Element von α und y Element von β ist". Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass, wenn R ein Korrelator von $\alpha - [x]$ und $\beta - [y]$ ist, die Relation $R \cup x\downarrow y$ ein Korrelator von α und β ist:

L6.22 $\vdash \alpha - [x] >R< \beta - [y] .\rightarrow. x \varepsilon \alpha \wedge y \varepsilon \beta \rightarrow \alpha >R \cup x\downarrow y< \beta$

Beweis von L6.22

$\vdash \alpha - [x] = D'R \wedge R \varepsilon 1 \rightarrow 1 \wedge \breve{C}'R = \beta - [y] \wedge x \varepsilon \alpha \wedge y \varepsilon \beta$

$.\rightarrow. R \cup x\downarrow y \varepsilon 1 \rightarrow 1$ nach *71.242, da $R \varepsilon 1 \rightarrow 1$, nach *72.182

$\vdash x\downarrow y \varepsilon 1 \rightarrow 1$ und Vor-(bzw. Nach-)bereich von R fremd zum Vor- (bzw. Nach-)bereich von $x\downarrow y$ ist

$\wedge \alpha = D'R \cup x\downarrow y$ da $\alpha = \alpha - [x] \cup [x] = D'R \cup D'x\downarrow y = D'R \cup x\downarrow y$ ist

$\wedge \beta = \breve{C}'R \cup x\downarrow y$ da $\beta = \beta - [y] \cup [y] = \breve{C}'R \cup \breve{C}'x\downarrow y = \breve{C}'R \cup x\downarrow y$ ist

Hieraus ergibt sich L6.22 nach D4.1. -

Aus L6.22 folgt

$\vdash \alpha - [x] >R< \beta - [y] .\rightarrow. x \varepsilon \alpha \wedge y \varepsilon \beta \rightarrow \dot{S}\alpha >S< \beta$

$\vdash (\dot{R}\alpha - [x] >R< \beta - [y] .\rightarrow. x \varepsilon \alpha \wedge y \varepsilon \beta \rightarrow \dot{S}\alpha >S< \beta$

und hieraus ergibt sich L6.21 auf Grund von D4.2 und L4.5.

Beweis von L6.2 aus L6.21.

Verstärkt man in L6.21 das Implikans $\mathrm{Kz}'\alpha - [x] = \mathrm{Kz}'\beta - [y]$ zu $\mathrm{Kz}'\alpha - [x] = u \wedge \mathrm{Kz}'\beta - [y] = u$ und schwächt man das Implikat $\mathrm{Kz}'\alpha = \mathrm{Kz}'\beta$ zu $\mathrm{Kz}'\alpha = v \wedge \mathrm{Kz}'\beta = w \rightarrow v = w$ ab, so erhält man:

$\vdash \mathrm{Kz}'\alpha = v \wedge x \varepsilon \alpha \wedge \mathrm{Kz}'\alpha - [x] = u \wedge \mathrm{Kz}'\beta = w \wedge y \varepsilon \beta \wedge \mathrm{Kz}'\beta - [y] = u \rightarrow v = w$

$\vdash (\dot{\alpha}\dot{x}) \wedge (\dot{\beta}\dot{y}) \rightarrow v = w$

und dies ist nach D4.2 äquivalent mit:

$\vdash \quad uVgv \wedge uVgw \to v = w$

$\vdash \quad Vg \in cls \to 1$.

§ 7. Beweis für die Wiederholungsfreiheit der Zahlenfolge.

Um zu zeigen, dass die Konstanten O Vg nz dem Axiom A4 genügen:

L7.1 $\quad \vdash \quad z \in nz \to {}_z\overline{zVg_{po}z}$

weisen wir zunächst die Einmehrdeutigkeit der Vorgängerrelation nach:

L7.2 $\quad \vdash \quad Vg \in 1 \to cls$

Der Beweis von L7.2 wird analog zu dem von L6.2 geführt. Seine wichtigste Stütze ist der folgende Satz, den man als eine Umkehrung von L6.21 bezeichnen kann:

L7.21 $\vdash Kz'\alpha = Kz'\beta \;.\to.\; x \in \alpha \wedge y \in \beta \to Kz'\alpha - [x] = Kz'\beta - [y]$

"wenn die Kardinalzahl von α gleich der Kardinalzahl von β ist, so ist auch die Kardinalzahl von $\alpha - [x]$ gleich der Kardinalzahl von $\beta - [y]$, falls x Element von α und y Element von β ist". Um diesen Satz zu beweisen, zeigen wir, dass, wenn R ein Kerrelator von α und β ist, die Relation

$$(R - x{\downarrow}\check{R}'x - R'y{\downarrow}y) \cup R'y{\downarrow}\check{R}'x$$

ein Korrelator von $\alpha - [x]$ und $\beta - [y]$ ist, die aus R dadurch hervorgeht, dass man die beiden R-Paare $x{\downarrow}\check{R}'x$ und $R'y{\downarrow}y$ herausnimmt und das geordnete Paar $R'y{\downarrow}\check{R}'x$ hinzufügt. Wir zeigen also:

L7.22 $\vdash \alpha \,{>}R{<}\, \beta$

$.\to. \; x \in \alpha \wedge y \in \beta \to \alpha - [x] {>} (R - x{\downarrow}\check{R}'x - R'y{\downarrow}y) \cup R'y{\downarrow}\check{R}'x {<} \beta - [y]$

Beweis von L7.22.

$\vdash \alpha = D'R \wedge R \in 1 \to 1 \wedge \breve{C}'R = \beta \wedge x \in \alpha \wedge y \in \beta$

$\rightarrow (R - x\downarrow\breve{R}'x - R'y\downarrow y) \cup R'y\downarrow\breve{R}'x \in 1 \rightarrow 1$

denn nach *71.235 ist zunächst, da $R \in 1 \rightarrow 1$ und nach *72.182 $x\downarrow\breve{R}'x, R'y\downarrow y \in 1 \rightarrow] : R - x\downarrow\breve{R}'x - R'y\downarrow y \in 1 \rightarrow 1$; und daher, da $R'y\downarrow\breve{R}'x \in 1 \rightarrow 1$ und Vor- (bzw. Nach-)bereich von $R - x\downarrow\breve{R}'x - R'y\downarrow y$ fremd zum Vor- (bzw. Nach-)bereich von $R'y\downarrow\breve{R}'x$, nach *71.242 die gesamte Relation eineindeutig.

$\wedge\ \alpha -[x] = D'[(R - x\downarrow\breve{R}'x - R'y\downarrow y) \cup R'y\downarrow\breve{R}'x]$

denn $\alpha -[x] = (\alpha -[x] -[R'y]) \cup [R'y] = (D'R - D'x\downarrow\breve{R}'x - D'R'y\downarrow y) \cup D'R'y\downarrow\breve{R}'x = D'R \ldots$

$\wedge\ \beta -[y] = \breve{D}'[(R - x\downarrow\breve{R}'x - R'y\downarrow y) \cup R'y\downarrow\breve{R}'x]$

denn $\beta -[y] = (\beta -[R'x] -[y]) \cup [\breve{R}'x] = (\breve{D}'R - \breve{D}'x\downarrow\breve{R}'x - \breve{D}'R'y\downarrow y) \cup \breve{D}'R'y\downarrow\breve{R}'x = \breve{D}'R \ldots$

hieraus ergibt sich L7.22 nach D4.1. -

Aus L7.22 folgt:

$\vdash\ \alpha >R< \beta .\rightarrow. x \in \alpha \wedge y \in \beta \rightarrow \dot{S}\ \alpha -[x] >S< \beta -[y]$

$\vdash\ (\dot{R}\ \alpha >R< \beta) .\rightarrow. x \in \alpha \wedge y \in \beta \rightarrow \dot{S}\ \alpha -[x] >S< \beta -[y]$

und hieraus ergibt sich L7.21 auf Grund von D4.2 und L4.5.

Beweis von L7.2 aus L7.21.
Verstärkt man in L7.21 das Implikans $Kz'\alpha = Kz'\beta$ zu $Kz'\alpha = w \wedge Kz'\beta = w$ und schwächt man das Implikat $Kz'\alpha -[x] = Kz'\beta -[y]$ zu $Kz'\alpha -[x] = u \wedge Kz'\beta -[y] = v \rightarrow u=v$ ab, so erhält man

$\vdash Kz'\alpha = w \wedge x \in \alpha \wedge Kz'\alpha -[x] = u \wedge Kz'\beta = w \wedge y \in \beta \wedge Kz'\beta -[y] = v \rightarrow u = v$

$\vdash (\dot{\alpha}\dot{x}) \wedge (\dot{\beta}\ \dot{y}) \rightarrow u = v$

und dies ist nach D4.2 äquivalent mit

$\vdash\ uVgw \wedge vVgw \rightarrow u = v$

$\vdash\ Vg \in 1 \rightarrow cls\ .$

Den Beweis für L7.1 führen wir mit Hilfe vollständiger Induktion. Zur Anwendung dieser Schlussweise sind wir

durch L5.3 berechtigt. Wir zeigen, dass die Menge $\hat{\xi}\ \overline{\xi \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} \xi}$ die beiden folgenden Eigenschaften hat:

1) die O gehört ihr an:

L7.3 $\vdash\ \overline{\mathrm{O} \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} \mathrm{O}}$

2) sie ist Vg-erblich:

L7.31 $\vdash\ \overline{u\ \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} u} \wedge u \mathrm{Vg} v \rightarrow \overline{v\ \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} v}$

Beweis von L7.3.

Aus der Definition von Vg ergibt sich unmittelbar, dass zu O kein Vg-Vorgänger existiert:

$$\vdash \sim \dot{y}\ y \mathrm{Vg} \mathrm{O} \qquad (1)$$

denn $\vdash\ y \mathrm{Vg} \mathrm{O} \rightarrow \dot{\alpha}\ \mathrm{Kz}'\alpha = \mathrm{O} \wedge \dot{x}\ x \in \alpha$ nach D5.2

$\vdash \rightarrow \dot{\alpha}(\sim \dot{x}\ x \in \alpha) \wedge (\dot{x}\ x \in \alpha)$ gemäss L5.14

yVgO impliziert also einen Widerspruch; daher gilt (1). da es zu O keinen Vg-Vorgänger gibt, gibt es erst recht keinen echten Vg-Vorfahr: denn nach S_A14 gilt:

$$\vdash\ (\sim \dot{y}\ y \mathrm{Vg} \mathrm{O}) \rightarrow \sim \dot{y}\ y \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} \mathrm{O} \qquad (2)$$

und hieraus folgt wegen (1):

$$\vdash \sim \dot{y}\ y \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} \mathrm{O} \qquad (3)$$

und daraus L7.3.

Beweis von L7.31.

Nach S_A22 gilt:

$$\vdash\ u \mathrm{Vg} v \wedge v \mathrm{Vg}_{*} u \rightarrow u \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} u \qquad (1)$$

Nach S_A31 gilt wegen L7.2:

$$\vdash\ u \mathrm{Vg} v \wedge v \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} v \rightarrow v \mathrm{Vg}_{*} u \qquad (2)$$

Durch Kettenschluss folgt aus (1) und (2):

$$\vdash\ u \mathrm{Vg} v \wedge v \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} v \rightarrow u \mathrm{Vg}_{\mathrm{po}} u \qquad (3)$$

woraus sich L7.31 durch Kontraposition ergibt. -

§ 8. Beweis für das Nichtabbrechen der Zahlenfolge.

Um zu beweisen, dass A3 durch unsere Konstanten erfüllt wird:

L8.1 $\vdash$ $y \varepsilon nz \rightarrow {}_y \overset{\circ}{z}\, yVgz$

um also zu beweisen, dass jede natürliche Zahl mindestens einen Nachfolger besitzt, zeigen wir, dass jede natürliche Zahl zu der Kardinalzahl der Menge ihrer Vg-Vorfahren in der Vorgängerrelation steht:

L8.2 $\vdash$ $z \varepsilon nz \rightarrow_z z\, Vg(Kz'\overrightarrow{Vg_*}'z)$.

Inhaltlich gesprochen bedeutet das: in der Folge der natürlichen Zahlen folgt auf die Zahl z die Kardinalzahl unmittelbar, die der Menge aller Kardinalzahlen zukommt, die z in der Folge der natürlichen Zahlen vorangehen, oder: die kleiner oder gleich z sind. (Da wir die Folge mit 0 beginnen lassen, gibt es z+1 Zahlen, die kleiner oder gleich z sind.) Im Beweis werden wir wesentlich die im vorigen Paragraphen bewiesene Tatsache benutzen, dass in der Folge der natürlichen Zahlen kein Element zweimal auftritt.

Der Beweis von L8.2 erfolgt wieder durch vollständige Induktion; es ist hier jedoch notwendig, die folgende Verschärfung des Satzes von der vollständigen Induktion zu benutzen:

L8.3 $\vdash$ $0 \varepsilon \alpha \wedge (u \varepsilon nz \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uVgv \rightarrow_{uv} v \varepsilon \alpha) \rightarrow_\alpha nz \subset \alpha$

die sich von L5.3 dadurch unterscheidet, dass die Vg-Erblichkeit der Menge α nicht allgemein, sondern nur für die natürlichen Zahlen vorausgesetzt wird. L8.3 ist ebenso wie L5.3 ein Satz der Logik (S_A51, vgl. auch § 14), sodass wir uns auf ihn stützen dürfen. Wir zeigen nun, um L8.2 mit L8.3 zu beweisen, dass die Menge $\hat{\xi}\, \xi Vg(Kz'\overrightarrow{Vg_*}'\xi)$ die beiden Eigenschaften hat

1) die 0 gehört ihr an:

L8.21 $\vdash \quad 0\ Vg(Kz'\overrightarrow{Vg_*}'0)$

2) für die natürlichen Zahlen Vg-erblich ist:

L8.22 $\vdash \quad u \varepsilon\ nz \wedge uVg(Kz'\overrightarrow{Vg_*}'u) \wedge uVgv \rightarrow_{uv} vVg(Kz'\overrightarrow{Vg_*}'v)$

Beweis von L8.21.

Wir substituieren in dem Satz

$$\vdash Kz'\alpha - [x] = m \wedge x \varepsilon \alpha \rightarrow m\ Vg\ Kz'\alpha \qquad (1)$$

der eine einfache Folgerung von D5.2 ist, m/0, x/0, α/ $\overrightarrow{Vg_*}'0$, sodass die Behauptung von L8.21 im Implikat steht:

$$\vdash Kz'(\overrightarrow{Vg_*}'0 - [0]) = 0 \wedge 0 \varepsilon\ \overrightarrow{Vg_*}'0 \rightarrow 0Vg(Kz'\overrightarrow{Vg_*}'0) \qquad (2)$$

und zeigen die Allgemeingültigkeit des Implikans.

$\vdash 0 \varepsilon\ \overrightarrow{Vg_*}'0$ folgt aus der Totalreflexivität von Vg_* (S_A1)

$\vdash Kz'(\overrightarrow{Vg_*}'0 - [0]) = 0$ ist nach L5.14 äquivalent mit

$$\vdash \sim \mathring{m}\ mVg_*0 \wedge m \neq 0 \qquad (3)$$

(3) folgt aus

$$\vdash \quad mVg_*0 \wedge m \neq 0 \rightarrow \quad mVg_{po}0 \qquad (S_A12)$$

und $\vdash \sim \mathring{m}\ mVg_{po}0$ (L7.3,(3))

Beweis von L8.22.

Die wichtigste Station dieses Beweises ist der Satz:

$$\vdash u \varepsilon\ nz \wedge uVgv \rightarrow Kz'(\overrightarrow{Vg_*}'v - [v]) = Kz'\overrightarrow{Vg_*}'u \qquad (4)$$

der - inhaltlich gedeutet - besagt, dass die Kardinalzahl der Zahlen, die kleiner als v sind, gleich der Kardinalzahl der Zahlen ist, die kleiner oder gleich u sind, wenn u ein Vorgänger von v ist und u und v natürliche Zahlen sind.

Anm. Die Voraussetzung $u \varepsilon\ nz$ ist notwendig, denn für unendliche Kardinalzahlen ist der Satz

$$uVgv \rightarrow Kz'(\overrightarrow{Vg_*}'v - [v]) = Kz'\overrightarrow{Vg_*}'u$$

falsch. Setzt man nämlich für u und v die Kardinalzahl $\aleph$ einer unendlichen Menge ein, so behauptet dieser Satz[1]):

$$\mathcal{N}\,Vg\,\mathcal{N} \to Kz'\Lambda = Kz'[\mathcal{N}]$$

und das ist falsch, da das Implikans wahr und das Implikat falsch ist ($Kz'\Lambda = 0$ nach D5 1, $Kz'[\mathcal{N}] = 1$, da die Kardinalzahl einer Einerklasse gleich 1 ist).- Die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung $u \varepsilon nz$ in (4) ist der Grund dafür, dass man beim Beweis von L8.2 die verschärfte Form L8.3 des Induktionsaxioms benutzen muss.

Um die Identität der Kardinalzahlen von $\overrightarrow{Vg_*}'v - [v]$ und $\overrightarrow{Vg_*}'u$ nachzuweisen, beweisen wir die Identität dieser beiden Mengen, d.h. wir zeigen, dass ein Element dann und nur dann zu v in der Vg_*-Relation steht und von v verschieden ist, wenn es zu u in der Vg_*-Relation steht; genauer zeigen wir folgendes:

a) $\vdash \quad uVgv \;.\to.\; aVg_*v \wedge a \neq v \to aVg_*u$

b) $\vdash \quad OVg_*u \wedge uVgv \;.\to.\; aVg_*u \to aVg_*v \wedge a \neq v$

Um a) zu erhalten, ersetze man in dem Satz

$$\vdash uVgv \wedge aVg_{po}v \to aVg_*u \qquad (5)$$

der sich wegen $\vdash Vg \varepsilon 1 \to cls$ aus S_A31 ergibt, den Term $aVg_{po}v$ gemäss S_A12 durch $aVg_*v \wedge a \neq v$. -

b) geht durch Produktbildung (s.Anh.II)hervor aus dem trivialen Satz (S_A21)

$$\vdash aVg_*u \wedge uVgv \to aVg_*v \qquad (6)$$

und dem Satz

$$\vdash OVg_*u \wedge aVg_*u \wedge uVgv \to a \neq v \qquad (7)$$

der sich auf die Wiederholungsfreiheit der Zahlenfolge stützt. Um (7) zu beweisen,bilde man das Produkt aus

$\vdash aVg_*u \wedge uVgv \to aVg_{po}v$ (S_A2)

und $\vdash OVg_*v \to \overline{vVg_{po}v}$ (L7.1)

Es ergibt sich:

(1) $\overrightarrow{Vg_*}'\mathcal{N} = [\mathcal{N}]$ wegen $\vdash \mathcal{N}\,Vg\,\mathcal{N}$ (Konsequenz aus der Definition der Vg-Relation) und $\vdash Vg \varepsilon cls \to 1$.

$$\vdash OVg_{*}v \wedge aVg_{*}u \wedge uVgv \rightarrow aVg_{po}v \wedge \overline{vVg_{po}v}$$
$$\vdash \rightarrow a \neq v \qquad (8)$$

Um hieraus (7) zu erhalten, ersetze man $OVg_{*}v$ gemäss $S_A 21$:

$$\vdash OVg_{*}u \wedge uVgv \rightarrow OVg_{*}v$$

durch $OVg_{*}u \wedge uVgv$. -

a) und b) ergeben zusammen:

$$\vdash OVg_{*}u \wedge uVgv \rightarrow \overrightarrow{Vg}_{*}'v - [v] = \overrightarrow{Vg}_{*}'u \qquad (9)$$

und daraus ergibt sich (4) auf Grund von L4.1.5. -

Durch die Substitution $\alpha/\ \overrightarrow{Vg}_{*}'v$, x/v, m/Kz'$\overrightarrow{Vg}_{*}'u$ geht aus (1) der Satz hervor

$$\vdash Kz'(\overrightarrow{Vg}_{*}'v - [v]) = Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'u \wedge v \varepsilon \overrightarrow{Vg}_{*}'v$$
$$\rightarrow (Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'u)Vg(Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'v) \qquad (10)$$

Wegen $\vdash v \varepsilon \overrightarrow{Vg}_{*}'v$ kann man aus (4) und (10) durch Kettenschluss auf folgenden Satz schliessen:

$$\vdash u \varepsilon nz \wedge uVgv \rightarrow (Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'u)Vg(Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'v) \qquad (11)$$

Substituiert man nun in dem Satz

$$\vdash uVgv \wedge xVgy \wedge uVgx \rightarrow vVgy$$

der aus der Mehreindeutigkeit der Vorgängerrelation folgt, $x/Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'u$, $y/Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'v$, so erhält man:

$$\vdash uVgv \wedge (Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'u)Vg(Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'v) \wedge uVg(Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'u)$$
$$\rightarrow vVg(Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'v) \qquad (12)$$

Kettenschluss aus (11) und (12) ergibt L8.22.

III. Abschnitt.

Zur Axiomatisierung der Arithmetik.

§ 9. Das Dedekind-AS der Arithmetik.

Nach § 3 ist ein System von Aussageformen dann und nur dann ein Axiomsystem der Arithmetik, wenn - unter Umständen nach einer Transformation der Veränderlichen - die generelle Äquivalenz dieses Systems mit den Aussageformen A-AS I(x R α) aus der Logik deduzierbar ist.

In diesem Sinne stammt das erste Axiomsystem der Arithmetik von DEDEKIND, der in Nr. 71 seiner Schrift: "Was sind und was sollen die Zahlen?" 1887 das folgende System von Aussageformen angegeben hat, das zwar von ihm selbst nicht als ein AS der Arithmetik bezeichnet worden ist, jedoch unseren Anforderungen genügt:

D-AS
- α) Das φ-Bild von N ist in N enthalten
- β) N ist identisch mit der φ-Kette von 1
- γ) 1 ist nicht Element des φ-Bildes von N
- δ) φ ist eine ähnliche Abbildung von N

Wir werden in § 11 den Beweis für die Äquivalenz dieses Systems mit A-AS I durchführen. Zwischen den beiden ASen besteht der unwesentliche Unterschied, dass DEDEKIND die freien Veränderlichen des AS, die wir mit x R α bezeichnet haben, mit 1 φ N bezeichnet. Zunächst formalisieren wir das von DEDEKIND nur formulierte AS. Dazu haben wir die Dedekindschen Definitionen für Abbildung, Bild und Kette zu symbolisieren.

δ) Eine Abbildung φ heisst (Zahlen, 21) eine Abbil -

dung der Menge N, wenn zu jedem Element aus N ein und nur ein Ding in der Relation φ steht:

$$\varphi \text{ ist eine Abbildung von } N =_{df} (y \varepsilon N \to {}^{\dot{z}}_{y}\, y \varphi z) \wedge N 1 \varphi \varepsilon \mathrm{cls} \to 1$$

Die Abbildung φ der Menge heisst (Zahlen, 26) ähnlich, wenn φ verschiedenen Elementen von N verschiedene Dinge zuordnet:

$$\text{die Abbildung } \varphi \text{ von N ist ähnlich} =_{df} N 1\, \varphi \varepsilon 1 \to \mathrm{cls}$$

γ) und α) Das φ-Bild einer Menge N ist (Zahlen, 21) die Gesamtheit aller z, zu denen ein Element y aus N in der Relation φ steht[1]):

$$\text{das } \varphi\text{-Bild von N} =_{df} \hat{z}\, \dot{y}\, y \varepsilon N \wedge y \varphi z$$

Bedingung γ) formalisiert: $\sim \dot{y}\, y \varepsilon N \wedge y \varphi 1$

Bedingung α) formalisiert: $y \varepsilon N \wedge y \varphi z \to {}_{yz}\, z \varepsilon N$

α) besagt also, dass N eine φ-erbliche Menge ist; DEDEKIND sagt stattdessen: N ist eine φ-Kette (Zahlen, 37).

β) die φ-Kette eines Elementes a (Zahlen, 44) ist der Durchschnitt aller a enthaltenden φ-Ketten, also in unserer Sprache: der Durchschnitt aller φ-erblichen Mengen, zu denen a gehört, oder (§ 2, Satz 1) die φ-Nachkommenschaft von a:

$$\text{die } \varphi\text{-Kette von a} =_{df} \mathcal{N}_{\varphi}{}' a$$

es gelten also für die Kette eines Elementes die in § 2 für die Nachkommenschaft eines Elementes ausgesprochenen Sätze; insbesondere folgt aus § 2, Satz 2, dass die Bedingung α) im D-AS entbehrlich ist.

Das formalisierte Dedekind-AS:

D-AS I

D1. $N = \mathcal{N}_{\varphi}{}' 1$

D2. $\sim \dot{y}\, y \varepsilon N \wedge y \varphi 1$

D3. $(y \varepsilon N \to {}^{\dot{z}}_{y}\, y \varphi z) \wedge N 1 \varphi \varepsilon 1 - 1$

1) Bei der Definition des φ-Bildes und der φ-Kette fordern wir nicht, dass φ eine Abbildung ist, da sonst jede der Bed. α)-δ) verlangen würde, dass φ eine Abbildung ist.

Für das Folgende ist es zweckmässig, das Axiom D1 in die drei Bedingungen: (1) 1 ist Element von N, (2) N ist eine φ-erbliche Menge, (3) N ist enthalten in der φ-Nachkommenschaft von 1 aufzuspalten. Die Möglichkeit gibt der Satz:

L9.1 $\vdash N = \mathcal{N}_\varphi'1 \leftrightarrow 1 \varepsilon N \wedge (y \varepsilon N \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon N) \wedge N \subset \mathcal{N}_\varphi'1$

Beweis von L9.1.

links → rechts: Wenn $N = \mathcal{N}_\varphi'1$, so folgt:
$1 \varepsilon N$ aus der Totalreflexivität von $\varphi_* (S_A 1)$
$y \varepsilon N \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon N$ aus § 2, Satz 2.

rechts → links: Aus $\vdash p \wedge [p \rightarrow q] \rightarrow q$ folgt durch Substitution:

$$\vdash 1 \varepsilon N \wedge (y \varepsilon N \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon N)$$
$$\wedge [1 \varepsilon N \wedge (y \varepsilon N \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon N) \rightarrow z \varepsilon N] \rightarrow z \varepsilon N$$

daraus ergibt sich, da $1 \varepsilon N$ und $y \varepsilon N \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon N$ vorausgesetzt werden:

$$[1 \varepsilon N \wedge (y \varepsilon N \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon N) \rightarrow z \varepsilon N] \rightarrow z \varepsilon N$$

Ersetzt man das Implikans durch das stärkere

$$1 \varepsilon \beta \wedge (y \varepsilon \beta \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon \beta) \rightarrow z \varepsilon \beta$$

so erhält man

$$\mathcal{N}_\varphi'1 \subset N .$$

Mit D-AS I äquivalent ist also die folgende zerlegte Gestalt des Dedekind-AS:

D-AS II	D1,1.	$1 \varepsilon N$
	D1,2.	$y \varepsilon N \wedge y \varphi z \rightarrow_{yz} z \varepsilon N$
	D1,3.	$N \subset \mathcal{N}_\varphi'1$
	D2.	$\sim \dot{y}\ y \varepsilon N \wedge y \varphi 1$
	D3,1.	$y \varepsilon N \rightarrow \dot{z}\ y \varphi z$
	D3,2.	$N^1\varphi \varepsilon cls \rightarrow 1$
	D3,3.	$N^1\varphi \varepsilon 1 \rightarrow cls$

§ 10. Deutung des Dedekind-AS.

Die Bedingungen des Dedekind-AS lassen sich inhaltlich folgendermassen aussprechen:

D3 besagt, dass die Relation φ jedem Element aus der Menge N umkehrbar eindeutig ein Element zuordnet, das φ nach D1,2 selbst der Menge N angehört. Dabei hat nach D2 diese Abbildung der Menge N in sich, die die Relation bewerkstelligt, die Eigenschaft, dass das Element 1, das nach D1,1 der Menge N angehört, nicht Bildelement ist.

Wir können also D1,1.1,2.2.3 so zusammenfassen:

N ist eine Menge, die durch φ eineindeutig so in sich abgebildet wird, dass das Element 1 aus N nicht Bildelement ist.

Hieraus folgt, wenn wir mit DEDEKIND (Zahlen,64) eine Menge unendlich nennen, wenn sie sich eineindeutig auf eine echte Teilmenge abbilden lässt:

N ist eine unendliche Menge. -

In der Deutung haben wir nun noch D1,3 zu berücksichtigen. Dies Axiom lautet ausführlicher geschrieben:

$$D1,3.\quad 1 \varepsilon \beta \wedge (u \varepsilon \beta \wedge u \varphi v \rightarrow_{uv} v \varepsilon \beta) \rightarrow N \subset \beta$$

es ist das "Axiom der vollständigen Induktion" (vgl.L5.3). Inhaltlich kann man es so aussprechen, dass die Menge N in jeder Menge β enthalten ist, die 1 als Element enthält und φ-erblich ist, die also D1,1 und D1,2 erfüllt. Innerhalb des AS ist diese Forderung äquivalent mit: N ist in jeder Menge enthalten, die die Axiome D1,1.1,2.2.3 erfüllt.

Da nach D1,1.1,2.2.3 N eine Menge ist die durch φ eineindeutig so in sich abgebildet wird, dass das Element 1 aus N nicht Bildelement ist, und dach D1,3 in jeder anderen Menge, die diese Forderungen erfüllt,enthalten ist

halten ist, lässt sich das ganze Dedekind-AS so aussprechen:

N ist die kleinste Menge, die durch φ eineindeutig so in sich abgebildet wird, dass das Element 1 aus N nicht Bildelement ist.

Und folgte aus D1, 1.1, 2.2.3, dass N eine unendliche Menge ist, so folgt aus dem vollständigen AS, dass N eine kleinste Menge dieser Art ist:

N ist eine abzählbar unendliche Menge

§ 11. Beweis der Äquivalenz des Dedekind-AS mit A-ASI.

Es soll jetzt die Äquivalenz zwischen dem Dedekind-AS und unserem AS der Arithmetik bewiesen werden. Nach den Deutungen, die wir diesen beiden ASen gegeben haben (§ 10 und § 2), bedeutet das, dass folgender Satz zu beweisen ist:

Wenn die Elemente von α die nicht-abbrechende, wiederholungsfreie mit x beginnende R-Folge bilden, so ist α die kleinste Menge, die durch R eineindeutig so in sich abgebildet wird, dass das Element x aus α nicht Bildelement ist, und umgekehrt[1].

Inhaltlich ist dieser Satz, wenn man die Sätze des § 2 heranzieht, einsichtig. Für den formalen Beweis der generellen Äquivalenz von A-AS I($x\ R\ \alpha$) und D-AS I($x\ R\ \alpha$) (bzw. D-AS II($x\ R\ \alpha$)) bleibt, da

$$A1 = D3,2$$

$$A2 = D1$$

$$A3 = D3,1$$

ist, noch die generelle Äquivalenz

$$A4(x\ R\ \alpha) \leftrightarrow {}_{xR\alpha}D2.3,3(x\ R\ \alpha)$$

zu zeigen.

1) Wir denken uns die Leerstellen des D-AS jetzt auch mit $x\ R\ \alpha$ statt $1\ \varphi\ N$ bezeichnet.

Da die Gültigkeit dieser Äquivalenz nur innerhalb des Axiomsystems behauptet wird, darf beim Beweis von den übrigen Axiomen Gebrauch gemacht werden. Hinreichend ist das Erfülltsein der "Folgen-konstituierenden" Axiome $\alpha \upharpoonright R \in cls \to 1$ und $\alpha = \overrightarrow{\mathcal{N}}_R{}'x$ (Al.2, bzw. Dl.3,2). Wir behaupten also folgenden Satz:

Wenn α die mit x beginnende R-Folge ist, so ist die R-Folge dann und nur dann wiederholungsfrei, wenn kein Element von α ein R-Vorgänger von x ist und wenn kein Element der Folge zwei verschiedene R-Vorgänger hat (d.h. die erzeugende Relation R einmehrdeutig ist).

Symbolisch:

$$L11.1 \vdash \alpha \upharpoonright R \in cls \to 1 \wedge \alpha = \overrightarrow{\mathcal{N}}_R{}'x$$

$$\cdot\to\cdot\ (y \in \alpha \to_y \overline{y\ R_{po}\ y}) \leftrightarrow (\sim \dot{y}\ y \in \alpha \wedge yRx) \wedge \alpha \upharpoonright R \in 1 \to cls$$

Zunächst sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Voraussetzung, dass α die mit x beginnende R-Folge ist, bereits eine grosse Zahl von Folgen ausschliesst, in denen Wiederholungen auftreten. Denn da, falls α eine R-Folge ist (s.§ 2), $\alpha \upharpoonright R \in cls \to 1$ gilt, jedes Element also höchstens einen R-Nachfolger hat, so ist es unmöglich, dass ein Element in einer R-Folge zweimal so auftritt, dass es an den beiden Stellen verschiedene R-Nachfolger hat. Die einzigen Wiederholungen, die demnach in einer R-Folge überhaupt vorkommen können, sind die reinen und die gemischten Perioden. Wenn wir also an eine mit x beginnende R-Folge die Forderung der Wiederholungsfreiheit stellen, so schliessen wir damit nur noch die reinen und die gemischten Perioden aus. In dem Satz L11.1 wird nun behauptet, dass diese Ausschliessung auch durch die beiden Forderungen, dass x in der R-Folge keinen R-Vorgänger hat und dass kein Element zwei verschiedene R-Vorgänger hat, erreicht wird. Anschaulich ist klar, dass durch die erste Forderung gerade die reinen und durch die zweite die gemischten Perioden ausgeschlossen werden.

---

1) Dabei ist überdies unmöglich, dass in einer einzelnen Periode oder auch dem aperiodischen Anfangsstück einer gemischten Periode ein Element zweimal auftritt, und dass x in einer gemischt-periodischen Folge ein 2. Mal auftritt.

Der Beweis für L11.1 lässt sich inhaltlich durch die folgenden Überlegungen führen, die auch unserem formalen Beweis zugrunde liegen:

rechts → links: Induktionsbeweis: x kann nicht zweimal auftreten, da x keinen R-Vorgänger hat. Wenn u nicht zweimal auftritt und uRw gilt, so tritt auch w nicht zweimal auf; denn wenn w zweimal auftritt, so tritt auch u zweimal auf, da sonst w zwei verschiedene R-Vorgänger haben würde.

links → rechts: Wenn x einen R-Vorgänger besitzt, ist die R-Folge nicht wiederholungsfrei, da x schon einmal, nämlich als Anfangselement, auftritt. - Wenn w zwei verschiedene R-Vorgänger u und v besitzt, so tritt w zweimal auf[2]. Dabei ist wesentlich, dass die R-Folge "zusammenhängend" ist, dass man also weiss, dass entweder u dem v oder v dem u in der Folge (in endlich vielen Schritten) vorangeht.

Der Satz L11.1 setzt sich aus folgenden Teilsätzen zusammen:

$$\text{L11.11} \quad \vdash \alpha 1R \in 1 \to 1 \wedge \alpha = \dot{\mathcal{N}}_R{}'x \wedge (\sim \dot{y}\ y \in \alpha \wedge yRx) \to (y \in \alpha \to_y \overline{y\ R_{po} y})$$

$$\text{L11.12} \quad \vdash \alpha = \dot{\mathcal{N}}_R{}'x \wedge (y \in \alpha \to_y \overline{y\ R_{po} y}) \to (\sim \dot{y}\ y \in \alpha \wedge yRx)$$

$$\text{L11.13} \quad \vdash \alpha 1R \in cls \to 1 \wedge \alpha = \dot{\mathcal{N}}_R{}'x \wedge (y \in \alpha \to_y \overline{y\ R_{po} y}) \to \alpha 1R \in 1 \to cls$$

Beweis von L11.11.
Der Beweis von L11.11 stellt fast dieselbe Aufgabe wie der Beweis des Axioms der Wiederholungsfreiheit in § 7. Dort verfügten wir über die Voraussetzungen $\vdash Vg \in 1 \to 1$ (L6.2 und L7.2) und $\vdash nz = \dot{\mathcal{N}}_{Vg}{}'0$, konnten $\vdash \sim \dot{y}\ yVg0$ leicht zeigen, und hatten daraus $\vdash y \in nz \to_y \overline{y\ Vg_{po} y}$ zu beweisen. Wir werden also einen Induktionsbeweis nach demselben Schema führen, wozu wir durch die Voraussetzung $\alpha = \dot{\mathcal{N}}_R{}'x$ berechtigt sind. Da jedoch unsere Voraussetzungen jetzt

2) Wir werden allerdings den Beweis so führen, dass wir zeigen, dass schon entweder u oder v zweimal auftritt.

etwas schwacher sind, ist die Anwendung der verschärften Form des Induktionsaxioms (S_A61, vgl. auch § 14) notwendig, aus der sich durch die Substitution $\alpha / \hat{\xi}\,\overline{\xi R_{po}\,\xi}$ ergibt:

$$\vdash \overline{x\ R_{po}x} \wedge (u \in \alpha \wedge \overline{u\ R_{po}u} \wedge uRv \to_{uv} \overline{v\ R_{po}v}) \to (y \in \alpha \to_y \overline{yR_{po}y})$$

Wir zeigen jetzt, dass unter den Voraussetzungen unseres Satzes gilt:

1) $\overline{x\ R_{po}x}$

2) $u \in \alpha \wedge \overline{u\ R_{po}u} \wedge uRv \to_{uv} \overline{v\ R_{po}v}$

und können dann auf die Gültigkeit von $(y \in \alpha \to_y \overline{y\ R_{po}y})$ schliessen.

Beweis von 1):

$$\vdash xR_{po}x \to \dot{y}\ xR_*y \wedge yRx \qquad (S_A2)$$
$$\to \dot{y}\ y \in \alpha \wedge yRx \qquad \text{wegen } \alpha = \mathcal{C}_R'x$$

wegen $(\sim \dot{y}\ y \in \alpha \wedge yRx)$ ist das Implikat falsch; es gilt also:

$\overline{x\ R_{po}x}$.

Beweis von 2):

$$\vdash uRv \wedge vR_*u \to uR_{po}u \qquad (S_A2) \qquad (1)$$

Wendet man S_A31 auf die Relation $\alpha 1R$ an, die nach Voraussetzung einmehrdeutig ist, so erhält man:

$$u \in \alpha \wedge uRv \wedge v \in \alpha \wedge vR_{po}v \to v \in \alpha \wedge vR_*u \qquad (2)$$

Auf Grund der R-Erblichkeit von α, die gemäss § 2 Satz 2 eine Konsequenz der Voraussetzung $\alpha = \mathcal{C}_R'x$ ist, darf in (2) $v \in \alpha$ eliminiert werden; denn es gilt allgemein, dass in der Aussageform $p \wedge q \wedge r \to q \wedge s$ das q eliminiert werden darf, wenn $p \to q$ gilt. Es ergibt sich:

$$u \in \alpha \wedge uRv \wedge vR_{po}v \to vR_*u \qquad (3)$$

Ersetzt man in (3) vR_*u nach (1), so erhält man:

$$u \in \alpha \wedge uRv \wedge vR_{po}v \to uR_{po}u \qquad (4)$$

und daraus ergibt sich 2) durch Kontraposition.

Beweis von L11.12.

Angenommen, $\sim \hat{y}\ y \varepsilon \alpha \wedge yRx$ sei falsch, es gelte also $\hat{y}\ y \varepsilon \alpha \wedge yRx$; dann gälte wegen $\alpha = \mathcal{N}_R{}'x$ auch $\hat{y}\ xR_*y \wedge yRx$, und daraus würde sich wegen S_A2: $xR_{po}x$ ergeben. Nun folgt aber aus der Voraussetzung $y \varepsilon \alpha \to_y \overline{y\ R_{po}y}$: $x \varepsilon \alpha \to \overline{x\ R_{po}x}$ und, da man wegen $\alpha = \mathcal{N}_R{}'x$ das Implikans $x \varepsilon \alpha$ abkoppeln darf: $\overline{x\ R_{po}x}$. Die Annahme führt also zu einem Widerspruch.

Beweis von L11.13.

Der Term $y \varepsilon \alpha \to_y \overline{y\ R_{po}y}$ im Implikans von L11.13, den man durch $y \varepsilon \mathcal{N}_R{}'x \to_y \overline{y\ R_{po}y}$ ersetzen darf, besagt, in der Sprache der PM ausgesprochen[3], dass es in der R-Nachkommenschaft von x keine zirkulären R-Glieder gibt. Denn aus der Definition der Klasse $J_R{}'x$ der nicht-zirkulären R-Glieder:

$$J_R{}'x =_{df} \mathcal{N}_R{}'x \cap \hat{z}\ \overline{z\ R_{po}z}$$

folgt:

$$\vdash (y \varepsilon \mathcal{N}_R{}'x \to_y \overline{y\ R_{po}y}) \to \mathcal{N}_R{}'x = J_R{}'x \qquad (1)$$

Der wesentliche Inhalt von L11.13 ist also die Behauptung, dass aus der Mehreindeutigkeit einer Relation R, die auf die nicht-zirkulären Glieder der Nachkommenschaft eines Elementes x vorbeschränkt ist, die Einmehrdeutigkeit der so beschränkten Relation folgt. Diese Aussage soll jetzt bewiesen werden, und zwar in der scheinbar etwas schwächeren Gestalt:

L11.131 $\vdash R \varepsilon cls \to 1 .\to. J_R{}'x \upharpoonright R \varepsilon 1 \to cls$.

Aus diesem Satz folgt in Verbindung mit (1):

$$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge (y \varepsilon \mathcal{N}_R{}'x \to_y \overline{y\ R_{po}y}) \to \mathcal{N}_R{}'x \upharpoonright R \varepsilon 1 \to cls \qquad (2)$$

und hieraus ergibt sich, wenn $R/\mathcal{N}_R{}'x \upharpoonright R$ substituiert, auf Grund der Sätze S_A5 und S_A6 und $\vdash \alpha(\alpha \upharpoonright R) = \alpha \upharpoonright R$:

$$\vdash \mathcal{N}_R{}'x \upharpoonright R \varepsilon cls \to 1 \wedge (y \varepsilon \mathcal{N}_R{}'x \to_y \overline{y\ R_{po}y}) \to \mathcal{N}_R{}'x \upharpoonright R \varepsilon 1 \to cls \qquad (3)$$

3) PM *96, R. CARNAP, Logistik 25c.

Aus (3) ergibt sich sofort L11.13. Es bleibt also nur L11.131 nachzuweisen.

Beweis von L11.131.
Der Beweis stützt sich auf die beiden folgenden Hilfssätze:

H1. $\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge y.z \varepsilon \mathscr{M}_R{}'x \to yR_{po}z \vee y = z \vee zR_{po}y$

"wenn R mehreindeutig ist, ist R_{po} für die Elemente der R-Nachkommenschaft eines beliebigen Elementes zusammenhängend". Einen elementaren Beweis dieses wichtigen Satzes findet man im Anhang I.

H2. $\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge yR_{po}z \wedge yRw \wedge zRw \to zR_{po}z$

H2 folgt durch Kettenschluss aus

$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge w\breve{R}y \wedge yR_{po}z \to wR_*z$ (S_A3)

und $\vdash zRw \wedge wR_*z \to zR_{po}z$ (S_A22). -

Der Satz L11.131 lässt sich ausführlicher so schreiben:

$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge y.z \varepsilon \mathscr{M}_R{}'x \wedge \overline{y\,R_{po}y} \wedge \overline{z\,R_{po}z} \wedge yRw \wedge zRw \to y = z$ (1')

Durch Umstellung erhält man aus H1:

$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge y.z \varepsilon \mathscr{M}_R{}'x \wedge \overline{y\,R_{po}z} \wedge \overline{z\,R_{po}y} \to y = z$

Hieraus kann man (1') gewinnen, wenn man zeigt, dass man $\overline{y\,R_{po}z} \wedge \overline{z\,R_{po}y}$ durch $\overline{y\,R_{po}y} \wedge \overline{z\,R_{po}z} \wedge yRw \wedge zRw$ ersetzen darf. Das ist wegen der Mehreindeutigkeit von R gestattet; denn es gilt:

$\vdash R \varepsilon cls \to 1 .\to. (yR_{po}z \vee zR_{po}y) \wedge yRw \wedge zRw \to yR_{po}y \vee zR_{po}z$

Dieser Satz ergibt sich durch logische Addition[4] aus H2 und dem dazu analogen Satz:

$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge zR_{po}y \wedge zRw \wedge yRw \to yR_{po}y$. -

4) Vgl. Anhang II.

§ 12. Das Peano-AS der Arithmetik.

Mit dem Dedekind-AS der Arithmetik ist das am häufigsten benutzte AS der Arithmetik von PEANO nicht nur äquivalent, sondern, wenn man von unwesentlichen Abweichungen in der Formulierung und kleinen Verschiebungen der Axiome absieht, identisch.

PEANO hat sein AS zuerst in den Arithmetices principia von 1889 und später mit verschiedenen Varianten in den verschiedenen Ausgaben des Formulaire de Mathématiques angegeben. Wir legen hier die Ausgabe von 1901 zugrunde. Als "Grundbegriffe" werden

0 zéro

N_0 nombre (entier, positif ou nul)

a^+ le successif de a (eine Kennzeichnungsfunktion, die unserem Ř'a entspricht)

benutzt; das AS hat folgende Gestalt[1]:

P-AS I

P1. $0 \varepsilon N_0$

P2. $a \varepsilon N_0 \rightarrow_a a^+ \varepsilon N_0$

P3. $a.b \varepsilon N_0 \wedge a^+ = b^+ \rightarrow_{ab} a = b$

P4. $a \varepsilon N_0 \rightarrow_a a^+ \neq 0$

P5. $0 \varepsilon \beta \wedge (y \varepsilon \beta \rightarrow_y y^+ \varepsilon \beta) \rightarrow_\beta N_0 \subset \beta$

Vom logischen Standpunkt gesehen ist es ein Nachteil, dass PEANO von der Kennzeichnungsfunktion a^+ Gebrauch macht; denn jedes Axiom, in dem diese Kennzeichnung auftritt, fordert die Existenz und Unizität des R-Nachfolgers von a. Wir wollen daher diese Kennzeichnungsfunktion eliminieren; gleichzeitig führen wir statt der freien Variablen 0, a^+, N_0, die PEANO benutzt, unsere Zeichen x,R, α ein und spalten das Axiom P2 in die folgenden drei Forderungen auf:

1) in der Symbolik der von uns zugrunde gelegten Logik angeschrieben.

P2,1. $y \varepsilon \alpha \rightarrow_y \dot{z}\ yRz$

P2,2. $\alpha^1R \varepsilon cls \rightarrow 1$

P2,3. $y \varepsilon \alpha \wedge yRz \rightarrow_{yz} z \varepsilon \alpha$

Diese Aufspaltung wird durch die beiden folgenden Sätze legitimiert:

L12.1. $\vdash (y \varepsilon \alpha \rightarrow_y \dot{z}\ yRz) \wedge \alpha^1R \varepsilon cls \rightarrow 1 \leftrightarrow y \varepsilon \alpha \rightarrow_y E!\breve{R}'y$

(folgt aus $\vdash (yRu \wedge yRv \rightarrow_{uv} u = v) \wedge \dot{z}\ yRz \leftrightarrow E!\breve{R}'y$, indem man auf beiden Seiten $y \varepsilon \alpha$ als Implikans davorsetzt.).

L12.2 $\vdash (y \varepsilon \alpha \rightarrow_y E!R'y) \wedge (y \varepsilon \alpha \wedge yRz \rightarrow_{yz} z \varepsilon \alpha)$

$\leftrightarrow y \varepsilon \alpha \rightarrow_y \breve{R}'y \varepsilon \alpha$

(Beweis von links nach rechts mit *37.61, umgekehrt ist $\vdash (y \varepsilon \alpha \rightarrow_y \breve{R}'y \varepsilon \alpha) \rightarrow (y \varepsilon \alpha \wedge yRz \rightarrow_{yz} z \varepsilon \alpha)$ trivial.)

Durch diese Umformung geht P-AS I in das folgende System über:

P-AS II. P1. $x \varepsilon \alpha$

P2,1. $y \varepsilon \alpha \rightarrow_y \dot{z}\ yRz$

P2,2. $\alpha^1R \varepsilon cls \rightarrow 1$

P2,3. $y \varepsilon \alpha \wedge yRz \rightarrow_{yz} z \varepsilon \alpha$

P3. $\alpha^1R \varepsilon 1 \rightarrow cls$

P4. $\sim\dot{y}\ y \varepsilon \alpha \wedge yRx$

P5. $0 \varepsilon \beta \wedge (y \varepsilon \beta \wedge yRz \rightarrow_{yz} z \varepsilon \beta) \rightarrow_\beta \alpha \subset \beta$

und dieses System ist in der Tat mit D-AS II identisch.

Man verdankt also die sogenannten Peano-Axiome DEDEKIND; PEANO hat dies selbst in der Rivista di Matematica I, 1891, p.93 ausgesprochen[2]. Die inhaltliche Deutung,

2)Er sagt dort von seinen fünf Axiomen: Le proposizioni primitive che precedono sono dovute al DEDEKIND § 71; c'è pero una lieva differenza nell'enunciato della nostra prop.5 (che è la β del DEDEKIND), sulla quale non ci arresteremo.- Weitere Belege für die Abhängigkeit PEANOs von DEDEKIND: Einleitung zu den Arithmetices principia

die PEANO seinem AS gegeben hat, reicht an die Geschlossenheit der von DEDEKIND nicht heran. Seine Formulierung der Axiome in Worten ist ein unklares Zwischending zwischen der Folgendeutung (§ 2) und der Mengendeutung (§10). Er hat vorgeschlagen, die Axiome folgendermassen zu lesen:

P1. O appartient à N_o.

P2. Tout nombre est suivi par un nombre.

P3. Deux nombres suivis par le même nombre sont égaux.

P4. Le nombre qui suit un nombre quelconque n'est jamais O.

P5. Supposons que O appartienne à la classe β ; et que toutes les fois qu'un individu appartient à cette classe, son suivant y appartienne aussi; alors tous les nombres appartiennent à la classe β .

Zum Schluss der Paragraphen über DEDEKIND und PEANO wollen wir kurz zu ihren Anschauungen von den natürlichen Zahlen Stellung nehmen, von denen sie meinten, dass sie sich durch Abstraktion aus den übrigen Modellen der Arithmetik gewinnen liessen und somit durch ein AS eindeutig bestimmt seien.

Bezeichnet man mit $\mathcal{A}$ die Klasse der Mengen α , zu denen ein Element x und eine Relation R existiert, sodass x R α dem Dedekind- bzw. Peano-AS genügen, so lassen sich die Dedekindschen und Peanoschen Ausführungen so wiedergeben:

DEDEKIND (Zahlen, 73): Sieht man bei einer Menge aus $\mathcal{A}$ von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich ab, hält lediglich ihre Unterscheidbarkeit fest und fasst nur die durch α) - δ) definierten (und die aus ihnen ableitbaren) Eigenschaften auf, so erhält man die natürlichen Zahlen.

PEANO (Formulaire 1901, p.44): Die Klasse $\mathcal{A}$ besteht aus unendlich[3] vielen Mengen. Die natürlichen Zahlen sind

und DEDEKIND-Zitat im Formulaire von 1897, p.2f.

3) das ist trivial, sobald die Nichtleerheit von $\mathcal{A}$ gezeigt ist; PEANO und DEDEKIND (abgesehen von den psychologischen

die Menge, die man durch Abstraktion aus allen diesen Mengen erhält, oder anders ausgesprochen: die natürlichen Zahlen sind die Menge, die alle im AS aufgezählten (und die aus ihnen ableitbaren) Eigenschaften und keine andern besitzt.

Die Methode DEDEKINDs und PEANOs, die natürlichen Zahlen aus der Klasse $\mathcal{A}$ zu definieren, werden wir nur dann anerkennen, wenn sich der Abstraktionsprozess, den DEDEKIND mit den in die Psychologie gehörenden Termen "absehen, festhalten, auffassen" beschreibt, durch ein legitimes, logisch darstellbares Konstruktionsverfahren ersetzen lässt.

Zunächst ist festzustellen, dass bei DEDEKIND und PEANO jede Andeutung für ein solches Verfahren fehlt; ein solches Verfahren kann aber auch garnicht gefunden werden, da das, was mit seiner Hilfe konstruiert werden soll, nicht existiert. Es gibt in einer Klasse kein Element, das nur die die Klasse definierenden und keine anderen Eigenschaften besitzt. Zu jedem Element gibt es wenigstens eine Aussageform, die falsch wird, wenn man ein anderes Element einsetzt. Der Abstraktionsprozess, wie ihn DEDEKIND und PEANO im Auge haben, läuft in Wirklichkeit auf die Betrachtung des allgemeinen (d.h. eines beliebigen) Elementes von $\mathcal{A}$ hinaus und führt also zu der Anschauung von der Gleichberechtigung aller Modelle.[4)5)]

§ 13. Axiomsysteme der Arithmetik mit nur zwei oder einer freien Variablen (A-AS II).

Def. 1. Eine Aussageform $A(u_1u_2\ldots u_n)$ heisst abhängig von einer zweiten Aussageform $B(u_1u_2\ldots u_n)$, wenn

$$A(u_1u_2\ldots u_n) \rightarrow_{u_1u_2\ldots u_n} B(u_1u_2\ldots u_n)$$

Überlegungen, Zahlen 66) machen aber bei ihrer "Definition on" der natürlichen Zahlen die unbewiesene Voraussetzung, dass wenigstens ein Modell der Arithmetik existiert. 126f.

4) Vgl. auch die Kritik RUSSELLs an PEANO: Principles p.

5) Es sei darauf hingewiesen, dass PEANO im Formulaire

oder $A(u_1u_2\ldots u_n) \to_{u_1u_2\ldots u_n} B(u_1u_2\ldots u_n)$

aus der Logik deduzierbar ist; sonst heisst $A(u_1u_2\ldots u_n)$ unabhängig von $B(u_1u_2\ldots u_n)$.

Def. 2. Die freie Variable u_1 heisst von den Variablen $u_2\ldots u_n$ abhängig in bezug auf die Aussageform $A(u_1u_2\ldots u_n)$, wenn

$$A(u_1u_2\ldots u_n) \to_{u_1u_2\ldots u_n} u_1 = F(u_2\ldots u_n)$$

aus der Logik ableitbar ist, wo $F(u_2\ldots u_n)$ ein Ausdruck ist, in dem ausser den freien Variablen $u_2\ldots u_n$ nur Konstanten der Logik und gebundene Veränderliche auftreten; sonst heisst u_1 unabhängig von $u_2\ldots u_n$ inbezug auf $A(u_1u_2\ldots u_n)$.

In unserm Axiomsystem der Arithmetik A-AS $I(x\ R\ \alpha)$ sind die einzelnen Axiome unabhängig von einander. Das folgt aus den Überlegungen des § 2, in dem gezeigt wurde, dass es zu jedem Axiom ein System von Konstanten $x'\ R'\ \alpha'$ gibt, das dieses Axiom nicht, dagegen alle anderen Axiome befriedigt. Dasselbe gilt für die Systeme D-AS I (bzw. II) und P-AS I (bzw. II).

Dagegen ist in bezug auf A-AS $I(x\ R\ \alpha)$ (und ebenso in bezug auf die anderen Systeme)

1) α abhängig von x und R; denn es gilt:

L13.1. $\vdash$ A-AS $I(x\ R\ \alpha) \to_{xR\alpha}\ \alpha = \mathfrak{M}_R{}'x$

2) x abhängig von α und R; denn es gilt:

L13.2. $\vdash$ A-AS $I(x\ R\ \alpha) \to_{xR\alpha}\ x = (\iota z\ z \in \alpha \wedge \sim \mathring{y}\ y \in \alpha \wedge yRz)$

3) R unabhängig von x und α: denn auch wenn x und α vorgegeben sind, existieren undndlich viele verschiedene Relationen R, sodass $x\ R\ \alpha$ das AS befriedigen. R lässt sich also nicht durch x und α ausdrücken, und erst gibt es keine logische Funktion F, sodass $R = F(x\ \alpha)$ ist.

---

von 1891, p.70ff. (§ 32) einen Anlauf zu einer logischen Konstituierung der Arithmetik gemacht hat. Er verwirft dort aber die Identifizierung der Kardinalzahl einer Menge α mit der Gesamtheit der zu α gleichmächtigen Mengen.

Beweis von L13.2.
Unter der Voraussetzung A-AS $I(x\ R\ \alpha)$ gilt.

$$x = (\iota z\ z \varepsilon \alpha \wedge \sim \dot{y}\ y \varepsilon \alpha \wedge yRz)$$
$$\leftrightarrow x = (\iota z\ z \varepsilon \mathcal{N}_R{}'x \wedge \sim \dot{y}\ y \varepsilon \mathcal{N}_R{}'x \wedge yRz)$$
$$\leftrightarrow x = (\iota z\ xR_* z \wedge \overline{x\ R_{po}z}) \qquad (S_A 2)$$

Es genügt also:

$$\vdash \text{A-AS } I(x\ R\ \alpha) \rightarrow x = (\iota z\ xR_* z \wedge \overline{x\ R_{po}z}) \qquad (1)$$

oder:

$$\vdash \rightarrow (xR_* x \wedge \overline{x\ R_{po}x}) \wedge (xR_* y \wedge \overline{x\ R_{po}y} \rightarrow_y x = y) \qquad (2)$$

zu beweisen. Das ist jedoch sehr einfach: Die erste Klammer im Implikat von (2) ergibt sich aus $S_A 1$ und L11.12; die zweite Klammer ist wegen $S_A 11$ eine Tautologie.

Dementsprechend gibt es

1) eine Gestalt des A-AS I mit x und R als einzigen freien Variablen; sie entsteht dadurch, dass man überall α durch $\mathcal{N}_R{}'x$ ersetzt und die tautologische Forderung $\mathcal{N}_R{}'x = \mathcal{N}_R{}'x$, die aus A2 hervorgeht, weglässt.

2) eine Gestalt des A-AS I mit α und R als einzigen freien Variablen; sie entsteht dadurch, dass man x durch $(\iota z\ z \varepsilon \alpha \wedge \sim \dot{y}\ y \varepsilon \alpha \wedge yRz)$ ersetzt[1].

3) keine Gestalt des A-AS I mit x und α als einzigen freien Variablen.

In den beiden so entstehenden ASen A-AS $I(x\ R)$ und A-AS $I(\alpha\ R)$ sind die Variablen von einander unabhängig, denn sie lassen sich, wie man leicht feststellt, unabhängig von einander variieren.

1) ASe mit α und R als freien Variablen findet man bei A. PADOA, Theorie des nombres entiers absolus, Revista de Matematica, VIII, Torino 1902 - 06 (Reproduziert bei L. COUTURAT, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, dtsch. von C. SIEGEL, p. 59f.) und bei A. NATUCCI, Il concetto di numero, Torino 1923, p. 346 ff., der ein AS von M. PIERI mit α und R als Grundbegriffen anführt.

Die ausgezeichnete Rolle, die die Variable R spielt, legt es nahe, nach einem AS zu suchen, in dem R als einzige freie Variable auftritt. Aus dem Vorstehenden folgt, dass wir dies AS nicht durch eine äquivalente Umformung von A-AS $I(x\ R\ \alpha)$ finden können; wir müssen unser bisheriges AS verschärfen. Dass die Reduktion auf R als einzige freie Variable bisher nicht möglich war, liegt daran, dass zwischen R und α nicht genügend starke Bindungen bestanden; denn es wurde in A-AS $I(x\ R\ \alpha)$ nur verlangt, dass α im Feld von R enthalten, nicht dass α mit dem Feld von R identisch ist. Wir fügen daher zu unserm AS die Forderung

$$F.\quad (\dot{y}\ yRz) \to_z z \varepsilon \alpha \quad (\text{oder } D'R \subset \alpha)$$

hinzu; durch F und A3 ist dann $\alpha = D'R$ gewährleistet und daraus folgt $\alpha = C'R$, da nach F und A2.3 $\mathfrak{C}'R \subset D'R$ ist. In dem so entstehenden verschärften Axiomsystem A-AS $II'(x\ R\ \alpha)$ ist

1) α abhängig von R; denn es gilt:

L13.3. $\vdash$ A-AS $II'(x\ R\ \alpha) \to_{xR\alpha} \alpha = D'R$

2) x abhängig von R; denn es gilt:

L13.4. $\vdash$ A-AS $II'(x\ R\ \alpha) \to_{xR\alpha} x = B'R$

(L13.4 folgt aus L13.2.3)

Ersetzen wir nun in A-AS $II'(x\ R\ \alpha)$ x gemäss L13.4 durch B'R und α gemäss L13.3 durch D'R, so erhalten wir als das gesuchte AS der Arithmetik mit R als einziger freien Variablen das folgende System von Aussageformen:

A-AS II.

$$R \varepsilon cls \to 1 \qquad (A1)$$

$$D'R = \mathfrak{A}_R'B'R \qquad (A2.3.F)$$

$$R_{po} \subset J \qquad (A4)$$

Eine Relation mit diesen drei Eigenschaften nennen wir eine Progression:

D13.1 $P \varepsilon prog =_{df} P \varepsilon cls \to 1 \wedge D'P = \mathfrak{A}_P'B'P \wedge P_{po} \subset J$

Inhaltlich können wir in der Terminologie des § 2 sagen:

Eine Relation P ist dann und nur dann eine Progres-

sion, wenn die Elemente ihres Feldes die nicht-abbrechende, wiederholungsfreie, mit dem ausgezeichneten Element, das im Vor- und nicht im Nachbereich liegt, beginnende P-Folge bilden[2].

Die Definition D13.1 setzt uns instand, das AS in der Einen Forderung "R ist eine Progression" zusammenzufassen:

A-AS II. $R \varepsilon prog$

Das Verhältnis der beiden Axiomsysteme A-AS I(x R α) und A-AS II(R) ist folgendes: Genügt eine Relation R dem A-AS II, so bilden B'R, R, D'R (oder C'R) ein Tripel, das A-AS I befriedigt:

L13.5. $\vdash$ A-AS II(R) $\rightarrow_R$ A-AS I(B'R,R,D'R)

(folgt aus L13.3.4). Umgekehrt: Ist x R α ein Tripel, das A-AS I genügt, so ist α1R eine Progression und genügt also A-AS II:

L13.6. $\vdash$ A-AS I(x R α) $\rightarrow_{xR\alpha}$ A-AS II(α1R)

Beweis von L13.6.

α1R ε cls $\rightarrow$ 1 folgt aus A1.
E!B' α1R bedeutet E!(ιz z ε $\alpha \wedge \sim \check{y}$ y ε $\alpha \wedge$ yRz) und folgt nach L13.2 aus A2.4.
D' α1R = $\mathcal{N}_{\alpha 1R}$'B' α1R folgt wegen x = B' α1R (L13.2) aus D' α1R = $\mathcal{N}_{\alpha 1R}$'x; und dies folgt einerseits aus α = D'α1R (A3), andrerseits aus $\alpha = \mathcal{N}_{\alpha 1R}$'x (A2 und S_A5).
$(\alpha 1R)_{po} \subset J$ folgt aus A2.4 und S_A6.

2)Die Übereinstimmung dieser inhaltlichen Formulierung mit dem Definiens von D13.1 wird noch klarer, wenn man die Forderung D'P = $\mathcal{N}_P$'B'P in die beiden Forderungen

F1 C'P = $\mathcal{N}_P$'B'P

F2 $\mathfrak{C}$'P $\subset$ D'P

aufspaltet, von denen die erste die Identität des Feldes von P mit den Elementen der mit dem B'P beginnenden P-Folge (P ε cls $\rightarrow$ 1 und F1 sind die Folgen-konstituierenden Forderungen), die zweite das Nicht-abbrechen ausspricht. - F1 kann man innerhalb der Definition auch äquivalent durch

Im Vorstehenden haben wir A-AS I als Ausgangsstellung für den Aufstieg zur Progressionsgestalt gewählt. Man erreicht dasselbe Ziel, wenn man vom Dedekind- oder Peano-AS der Arithmetik ausgeht. Legt man etwa D-AS(x R α) zugrunde, und verschärft man dies System von Aussageformen durch Adjunktion der Forderung F, so geht D3,1 in α = D'R über und analog zu L13.4 ist x = B'R beweisbar.[3] Ersetzt man dann α und x gemäss diesen Identitäten, so geht D-AS(x R α) in das folgende System über, wenn man die tautologischen Forderungen weglässt:

A-AS II*. $\quad R \in 1 \to 1 \qquad$ (D3,2.3,3)

$\quad D'R = \mathcal{N}_R{}'B'R \quad$ (D1.2.3,1)

Aus der Äquivalenz von A-AS II und A-AS II* folgt, dass im Definiens der Progression die Forderungen $R_{po} \subset J$ und $R \in 1 \to cls$ durch einander ersetzt werden dürfen. Diese Tatsache kann man auf Grund der Überlegungen des § 11 auch direkt herleiten.

Vom logischen Standpunkt aus gesehen ist A-AS II (bzw. A-AS II*) das am meisten befriedigende AS der Arithmetik. Trotzdem haben wir beim Aufbau der vorliegenden Arbeit A-AS I ausgezeichnet, da man für die Begriffsbildungen der §§ 4.5 und die Beweise der §§ 6-8 einen leichteren Anschluss gewinnt.

§ 14. Das "Axiom der vollständigen Induktion".

I. Das Induktionsaxiom als Minimalaxiom.

Wir haben in § 10 bei der Deutung des Dedekind-AS festgestellt, dass sich das Induktionsaxiom (D1,3) in der Form

α ist in jeder Menge β enthalten, die D1,1.1,2.2.3(x Rβ) erfüllt

also als eine Aussageform, in der die übrigen Axiome auf-

$C'P \subset \mathcal{N}_P{}'B'P$ oder durch $D'P \subset \mathcal{N}_P{}'B'P$ ersetzen.

3) Einen direkten Beweis dieses Satzes und die Durchführung des Übergangs von D-AS zu A-AS II* findet man in SCHOLZ-

treten, aussprechen lässt. Das bekannteste Beispiel eines Axioms, das in der Gestalt einer Aussageform formuliert ist, in der die übrigen Axiome auftreten, ist das Vollständigkeitsaxiom in HILBERTs AS der Euklidischen Geometrie[1]. Dies Axiom besagt, dass das System der Punkte, Geraden und Ebenen, von denen in den vorangehenden Axiomen die Rede ist, keiner Erweiterung fähig ist so, dass für das erweiterte System wieder die vorangehenden Axiome gelten und die bestehenden Relationen der Inzidenz, Anordnung und Kongruenz erhalten bleiben. Im Gegensatz zu diesem Axiom, in dem die Maximalforderung ausgesprochen wird, dass die Modelle der Euklidischen Geometrie die umfassendsten von allen Systemen sind, die die übrigen Axiome erfüllen, ist das Induktionsaxiom eine Minimalforderung.

Sieht man von dieser Differenz ab, so unterscheiden sich das Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom und das Induktionsaxiom dadurch wesentlich von einander, dass das Induktionsaxiom nicht eine Aussage über eine Extremaleigenschaft der ganzen Modelle, sondern nur über eine Extremaleigenschaft der Variablen α unter der Voraussetzung, dass x und R irgendwie gewählt sind, macht.[2] Wir nennen jedoch ein Axiom nur dann ein Extremalaxiom, wenn es etwas über Extremaleigenschaften der gesamten freien Veränderlichen des AS aussagt. Sei AS(M) ein monomorphes Axiomsystem, M seine freien Variablen. Wir nennen dann ein Axiom, das als eine Aussageform formuliert ist, in der die übrigen Axiome, deren Konjunktion mit AS'(M) bezeichnet werden möge, auftreten ein Minimalaxiom, wenn es sich folgendermassen aussprechen lässt:

Die Modelle des AS sind unter allen Systemen, die AS'

BACHMANN, Grundlagen der Arithmetik, p.154ff.

1) In der ursprünglichen Gestalt: D.HILBERT, Grundlagen der Geometrie 6.Aufl. 1922, p.22; in der 7.Aufl. 1930, p.31 als Satz angegeben.

2) Dieser Unterschied zwischen dem Induktionsaxiom und dem Hilbertschen Vollständigkeitsaxiom besteht nicht auch zwischen der ursprünglichen und der neuen ([7]1930, p.30) Gestalt des Vollständigkeitsaxioms. Denn die Möglichkeit, dies nur als Aussageform in den Punkten einer Geraden auszusprechen, beruht auf dem Satz, dass jede "Erweiterung" der Punkte ei-

genügen, dadurch ausgezeichnet, dass sie einem (nicht notwendig echten) Teilsystem jedes Systems, das AS' genügt, isomorph sind.

symbolisch:

$$AS'(M') \rightarrow_{M'} \dot{T}\ T \subset M' \wedge T \text{ isom } M \quad 3)$$

Als ein Minimalaxiom in diesem Sinne lässt sich das Induktionsaxiom erst dann aussprechen, wenn man zu der Gene "Erweiterung" der Geraden und Ebenen impliziert und umgekehrt.

3)Analog verstehen wir unter einem Maximalaxiom eine Aussageform folgender Art:

Die Modelle des AS sind unter allen Systemen, die AS' genügen, dadurch ausgezeichnet, dass jedes System, das AS' genügt, einem (nicht notwendig echten) Teilsystem von ihnen isomorph ist.

symbolisch:

$$AS'(M') \rightarrow_{M'} \dot{T}\ T \subset M \wedge T \text{ isom } M'$$

Diese Formalisierung von Extremalaxiomen macht es möglich, in monomorphen ASen Extremalaxiome einheitlich zu formulieren und die von R.CARNAP in seinem "Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik" Erkenntnis I 1930, p.307 vorgeschlagene Unterscheidung von Extremalmodell- und Extremalstrukturaxiomen zu umgehen.

R.CARNAP hat darauf hingewiesen, dass man Minimalforderungen in monomorphen ASen, in denen echte Teilsysteme von Modellen wiederum Modelle sein können, so aussprechen kann ("Minimalstrukturaxiom"):

Die Modelle des AS sind unter allen Systemen, die AS' genügen, dadurch ausgezeichnet, dass diejenigen von ihren Teilsystemen, die ebenfalls AS' genügen,zu ihnen isomorph sind.

Dementsprechend kann man das Induktionsaxiom in der Gestalt F5 durch folgende Forderung ersetzen:

$$F1\text{-}4(P) \wedge P \subset R \rightarrow_P P \text{ isom } R$$

Dass diese Aussageform innerhalb des A-AS II mit F5 äquivalent ist,lässt sich ähnlich wie L14.1 beweisen.

stalt A-AS II(R) des Axiomsystems der Arithmetik mit R als einziger freien Variablen übergeht. Gemäss § 13 Fussnote 2) lassen sich die Forderungen dieses AS folgendermassen aufteilen:

F1. $R \varepsilon \text{ cls} \to 1$

F2. $R_{po} \subset J$

F3. $\breve{C}'R \subset D'R$

F4. $E!B'R$

F5. $D'R \subset \mathscr{N}_R'B'R$

Wir behaupten, dass die Forderung F5 sich durch die Minimalforderung ersetzen lässt, dass eine Teilrelation, die F1-4 befriedigt, zu R isomorph ist:

$$\text{F1-4}(P) \to_P \dot{Q}\, Q \subset P \wedge Q \text{ isom } R$$

wir behaupten also folgenden Satz:

L14.1. $\vdash \text{F1-4}(R)$

$$.\to. D'R \subset \mathscr{N}_R'B'R \leftrightarrow (\text{F1-4}(P) \to_P \dot{Q}\, Q \subset P \wedge Q \text{ isom } R)$$

Beweis von L14.1.

links → rechts: Wenn R eine Progression und P eine Relation ist, die die Forderungen F1-4 befriedigt, so ist $(\mathscr{N}_P'B'P)\restriction P$ eine zu R isomorphe Teilrelation von P. Denn da die Relation $(\mathscr{N}_P'B'P)\restriction P$ die Forderungen F1-5 erfüllt, ist sie selbst eine Progression, und da alle Progressionen zu einander isomorph sind (einen Beweis dieses Satzes findet man in SCHOLZ-BACHMANN, Grundlagen der Arithmetik, § 15), ist sie zu R isomorph.

rechts → links: Unter den Voraussetzungen, dass R den Forderungen F1-4 genügt, ist zu zeigen:

$$x \varepsilon D'R \wedge \overline{x \varepsilon \mathscr{N}_R'B'R} \to_{xR} \dot{P}\, \text{F1-4}(P) \wedge \sim\dot{Q}\, Q \subset P \wedge Q \text{ isom } R \quad (1$$

Aus den angenommenen Voraussetzungen folgt, dass ein Element x, das dem Vorbereich von R und nicht der R-Nachkommenschaft des B'R angehört, genau einen R-Nachfolger (wegen $x \varepsilon D'R$ und F1) und mindestens einen R-Vorgänger (wegen F4, da aus dem Implikans von (1): $x \neq B'R$ folgt),

und weiter, dass jeder R-Nachkomme von x genau einen R-Nachfolger (wegen F1.3) und jeder R-Vorfahr von x mindestens einen R-Vorgänger (wegen F4; dabei sorgt die Forderung $x \varepsilon \overline{\mathcal{M}_R}'B'R$ dafür, dass B'R nicht R-Vorfahr von x ist) besitzt. Ein solches Element x besitzt also eine R-Vorfahrenschaft ohne Anfangselement und eine nicht-abbrechende R-Nachkommenschaft, die beide wegen F2 zu einander elementefremd und wiederholungsfrei sind. Dabei braucht aber die R-Familie von x (d.i. die Vereinigung der R-Vorfahrenschaft und der R-Nachkommenschaft) - mengentheoretisch gesprochen - nicht vom Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ zu sein; sie kann sich zwar nach rechts[4] nicht gabeln; da wir aber die Unizität des R-Vorgängers eines Elements nicht behaupten können, ist es möglich, dass in jedem Element der R-Familie von x von links[4] her Äste einmünden, die ihrerseits wieder an jeder beliebigen Stelle von links her verästelt sein können, aber zu einander fremd und ohne Anfangselement sein müssen[5]. Für die R-Nachkommenschaft eines solchen Elementes x ergeben sich dann zwei Möglichkeiten:

a) sie mündet als Ast von links her in ein Element der echten R-Nachkommenschaft des B'R ein

b) sie ist elementefremd zur R-Nachkommenschaft des B'R.

Wir behaupten nun, dass die Relation $(\mathcal{M}_R'x)\upharpoonright R$ die Anforderungen erfüllt, die in (1) an P gestellt werden. Dazu haben wir die Teilrelationen dieser Relation zu untersuchen. $(\mathcal{M}_R'x)\upharpoonright R$ ist eine Progression, und Teilrelationen einer Progression müssen von einem der drei folgenden Typen sein:

α) ein endlicher Abschnitt[6] der Progression

4) Wir stellen uns vor, dass jeweils der R-Vorgänger links neben seinem R-Nachfolger steht.

5) Nennen wir Relationen, die F1-4 erfüllen, einmal Hyperprogressionen. Die Hyperprogressionen haben eine etwas einfachere Struktur, wenn man statt A-AS II A-AS II* zugrunde legt, d.h. F2 durch $R \varepsilon 1 \rightarrow cls$ ersetzt. Dann bestehen Hyperprogressionen aus genau einer Progression, 0 bis unendlich vielen Familien vom Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ und 0

β) mehrere (d.h. zwei bis unendlich viele)endliche Abschnitte der Progression

γ) ein unendlicher Abschnitt der Progression, d.h. wieder eine Progression

Eine Teilrelation vom Typus α) kann nicht zu R isomorph sein, da eine Relation, deren Feld eine unendliche Menge ist, nicht einer Relation mit endlichem Feld isomorph sein kann; eine Teilrelation vom Typus β) kann nicht zu R isomorph sein, da eine solche Relation mehrere Anfangselemente besitzt, während für R nach F4 das B'R existiert, und eine Relation mit genau einem nicht einer Relation mit mehreren Anfangselementen isomorph sein kann. Eine Teilrelation vom Typus γ), d.h. eine Progression,kann im Falle a) nicht zu R isomorph sein, da an der Einmündungsstelle die Einmehrdeutigkeit von R gestört ist, während Progressionen (vgl A-AS II*) einmehrdeutig sind,und da Einmehrdeutigkeit eine Isomorphie-erbliche Eigenschaft ist? Im Fall b) kann eine Teilrelation vom Typus γ) nicht zu R isomorph sein, da R in diesem Falle mindestens eine Teilrelation S enthält, sodass S_{po} vom Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ ist, während die zu einer Progression gehörige echte Vorfahr-Relation vom Ordnungstypus ω ist.

II. Die in der Mathematik gebräuchlichen Formen des Satzes von der vollständigen Induktion.

In der Mathematik wird der Satz von der vollständigen Induktion gewöhnlich so formuliert:

Um zu beweisen, dass eine Eigenschaft allen natürlichen Zahlen zukommt, genügt es zu beweisen, dass sie der Null und mit jeder natürlichen Zahl u auch u+1 zukommt.

---

bis unendlich vielen geschlossenen Familien mit einem bis unendlich vielen Elementen,wobei aber gesichert ist, dass alle diese Familien elementefremd sind.

6)Unter einem Abschnitt soll eine Teilrelation verstanden werden,deren echte Vorfahr-Relation zusammenhängend ist.

7)R.CARNAP, Logistik, L22.32

In unserer Terminologie können wir dafür sagen:

Eine Menge, die die Null und mit jeder natürlichen Zahl u auch u+1 enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.

Dieser Satz ist folgendermassen zu symbolisieren:

$$0 \varepsilon \beta \wedge (u \varepsilon nz \wedge u \varepsilon \beta \rightarrow_u u+1 \varepsilon \beta) \rightarrow_\beta nz \subset \beta$$

oder mit freien Variablen:

$$\text{Ind} \quad x \varepsilon \beta \wedge (u \varepsilon \alpha \wedge \beta \rightarrow_u \breve{R}'u \varepsilon \beta) \rightarrow_\beta \alpha \subset \beta$$

Dieser Satz unterscheidet sich von der Formulierung

$$\text{Ind}' \quad x \varepsilon \beta \wedge (u \varepsilon \beta \wedge uRv \rightarrow_{uv} v \varepsilon \beta) \rightarrow_\beta \alpha \subset \beta$$

die sich zunächst aus A-AS I (und den äquivalenten ASen der Arithmetik[1]) ergibt, dadurch, dass im Implikans die R-Erblichkeit der Menge β nicht für beliebige Dinge, sondern nur für die Elemente von α (d.h. im Spezialfall: nur für die natürlichen Zahlen) vorausgesetzt wird. Diese Formulierung reicht aber nicht aus, um die Anwendung des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion, so wie es in der Mathematik gehandhabt wird, zu sichern. Denn man begnügt sich dort immer mit dem Nachweis, dass die Eigenschaft, von der bewiesen werden soll, dass sie allen natürlichen Zahlen zukommt, mit jeder natürlichen Zahl auch ihrem Nachfolger zukommt, und beweist nicht, dass sie mit einem beliebigen Element auch dessen (irgendwie definierten) Nachfolger zukommt. Innerhalb eines AS der Arithmetik sind die beiden Formulierungen jedoch äquivalent.

Denn zunächst darf man (vgl. § 12) Ind ohne die Kennzeichnung $\breve{R}'u$ so formulieren: $\alpha \subset \mathscr{M}_{\alpha 1 R}'x$. daraus folgt Ind' allgemein. Umgekehrt ergibt sich Ind aus Ind' auf Grund von $S_A 5$; denn aus einem AS ist $\alpha = \mathscr{M}_R'x$ beweisbar, also folgt aus $\alpha \subset \mathscr{M}_R'x$: $\alpha \subset \mathscr{M}_{\mathscr{M}_R'x 1 R}'x$: $\alpha \subset \mathscr{M}_{\alpha 1 R}'x$.

PEANO hat seit dem Formulaire von 1897 das Induktionsaxiom in der schwächeren Form angegeben, obgleich in der ersten Veröffentlichung seines AS in den Arithmetices Principia 1889 die Form Ind zu finden ist. Aus seinen Bemerkungen zum Induktionsaxiom in den späteren Auflagen des Formu-

1) In A-AS II sind die beiden Formulierungen identisch.

laire kann man schliessen, dass er die beiden Forderungen nicht sauber getrennt hat.

LANDAU gibt in seinen "Grundlagen der Analysis" das Induktionsaxiom in der folgenden Formulierung an:

Eine Menge von natürlichen Zahlen, die die Null und mit u auch u+1 enthält, enthält alle natürlichen Zahlen.

symbolisiert:

$$\beta \subset nz \;.\rightarrow.\; 0 \in \beta \wedge (u \in \beta \rightarrow_u u+1 \in \beta) \rightarrow_\beta nz \subset \beta$$

Diese Formulierung ist weder mit Ind noch mit Ind' äquivalent; sie ist nur ein Spezialfall dieser beiden Formulierungen, die offen lassen, dass in den Mengen β ausser natürlichen Zahlen beliebige Dinge enthalten sind. Trotzdem reicht das Landausche Axiom zum Aufbau der Arithmetik hin.

IV. Abschnitt.

Freges Interpretation der Arithmetik und die Interpretation der Arithmetik in den Principia Mathematica.

§ 15. Freges Ableitbarkeitsbeweis.

Von den beiden Teilproblemen, in die wir in der Einleitung das Problem der Ableitbarkeit einer Interpretation der Arithmetik aus der Logik aufgespalten haben, hat DEDEKIND, wie wir in § 9 gesehen haben, als Erster das erste Teilproblem gelöst. Auch zur Lösung des zweiten hat er einen Ansatz gemacht.

Etwa gleichzeitig mit DEDEKIND, aber unabhängig von ihm, hat sich FREGE um das Problem der Ableitbarkeit der Arithmetik aus der Logik bemüht. Der wesentliche Schritt, den FREGE über DEDEKIND hinaus getan hat, ist der, dass er sich nicht mit dem inhaltlichen Schliessen begnügt hat, sondern für diese Grundlagenuntersuchungen die erste logistische Logik konstituiert hat.

Charakteristisch für den Fregeschen Ableitbarkeitsbeweis ist immer, dass FREGE das erste Teilproblem nicht explizit gelöst hat. Wohl hat er die logische Struktur der Modelle der Arithmetik in vollkommener Weise erkannt und die zu ihrer logischen Darstellung notwendigen Begriffsbildungen vollzogen, ein AS der Arithmetik hat er jedoch nicht angegeben und auch nicht von einem solchen Gebrauch gemacht. Daher gibt es für FREGE auch nicht verschiedene Interpretationen der Arithmetik; für ihn handelt es sich deshalb bei der Lösung des zweiten Teilproblems um die Definition der Null, der Vorgängerrelation und der Menge der natürlichen Zahlen, wo es uns auch bei der Lösung der im Sinne von Seite 9 verschärften Aufgabe auf die Gewinnung von drei Aggregaten logischer Symbole ankommt, von denen sich logisch beweisen lässt, dass sie ein Modell der Arith-

metik bilden. Weiter ergibt sich aus der Tatsache, dass FREGE den Nachweis für die Ableitbarkeit nicht durch den Beweis eines AS der Arithmetik erbracht hat, dass er nur eine Reihe von Sätzen über die drei "Grundbegriffe" aus der Logik ableitete, deren Ableitbarkeit er jedenfalls für eine hinreichende Bedingung für die Ableitbarkeit der gesamten Arithmetik hielt, und die in der Tat zur Ableitung eines AS hinreichen.

Unter den Begriffsbildungen, die wir FREGE verdanken und die für die Lösung des Ableitbarkeitsproblems von fundamentaler Bedeutung sind, möchte ich die folgenden drei hervorheben:

1) die Eingliederung der sogenannten Definitionen durch Abstraktion in dem Bereich der logisch einwandfreien Definitionen und die Anwendung dieses Schemas bei der Definition der Kardinalzahlen.

2) den Begriff der einfachen und der echten R-Vorfahr-Relation (R_* und R_{po}), der die Struktur der einfach-unendlichen Folgen logisch zu erfassen gestattet.

3) den Begriff der Progression.

Auf die beiden ersten Punkte ist bereits ausführlich eingegangen. Wir wollen kurz den dritten diskutieren, da er gleichzeitig einen Beweis liefert, dass das Material zur Lösung des ersten Teilproblems vollständig zur Verfügung gestellt worden ist.

FREGEs Einführung des Progressionsbegriffs.

Der Term "Progression" (oder ein Äquivalent) findet sich zwar bei FREGE noch nicht. Jedoch hat FREGE auf Grund seiner Definition der Kardinalzahl $\aleph_0$ ("Anzahl Endlos") als der Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen folgenden Satz bewiesen (Grundgesetze, 207, 263):

Damit die Anzahl eines Begriffes Endlos ist, ist notwendig und hinreichend, dass die unter diesen Begriff fallenden Gegenstände in eine einfache (unverzweigte, nicht in sich zurücklaufende) Reihe geordnet werden können, die mit einem bestimmten Gegenstande anfängt und endlos fortläuft.

symbolisiert (in unsere Symbolik übertragen):

$$\vdash \mathrm{Kz}'\alpha = \aleph_0 \leftrightarrow \mathring{R}\, R \in \mathrm{cls} \to 1 \wedge R_{po} \subset J \wedge \alpha \subset D'R \wedge \dot{x}\, \alpha = \mathscr{N}_R{}'x$$

Auf der rechten Seite dieser Äquivalenz steht nichts anderes als dass α das Feld einer Progression ist; denn aus D13.1 lässt sich leicht beweisen:

$$\mathrm{L15.1.}\ \vdash P \in \mathrm{prog} \leftrightarrow P \in \mathrm{cls} \to 1 \wedge P_{po} \subset J \wedge C'P \subset D'P \wedge \dot{x}\, C'P = \mathscr{N}_P{}'x$$

Man darf also behaupten, dass der Progressionsbegriff und der wichtige Satz, dass die Kardinalzahl einer Menge dann und nur dann gleich $\aleph_0$ ist, wenn sie das Feld einer Progression ist, von FREGE stammen. Als Ergänzung sei mitgeteilt, dass FREGE neben diesem Satz den folgenden bewiesen hat:

Damit die Kardinalzahl eines Begriffs endlich ist, ist notwendig und hinreichend, dass sich die unter ihn fallenden Gegenstände in eine einfache Reihe ordnen lassen, die mit einem gewissen Gegenstand anfängt und mit einem gewissen Gegenstand endet.

So grosse Verdienste sich FREGE um die Logik und insbesondere die logische Konstituierung der Arithmetik erworben hat, die Fregesche Symbolik und die Fregesche Deduktion leiden unter Nachteilen, die praktisch seine Arbeiten so unzugänglich gemacht haben, dass sie nicht gelesen worden sind.

Zunächst ist FREGEs Formelschreibweise, die die einzelnen Implikantien gestaffelt unter das Implikat setzt, Unübersichtlichkeit vorgeworfen worden. Ich glaube, dass nur die Gewohnheit, Formeln in eine Zeile zu schreiben, dies als Mangel empfinden lässt. Viel mehr wird das Lesen der Fregeschen Formeln durch das Fehlen von Symbolen erschwert, die zwar grundsätzlich entbehrlich sind, aber eine weitgehende Angleichung der begriffsschriftlich dargestellten Sätze an die sprachlich formulierten ermöglichen. Es fehlen von den elementaren Symbolen das Konjunktions-, Disjunktions- und das Existenzzeichen; daher muss eine simple Formel wie

$$(\tilde{x}\, \varphi x \to \psi x) \wedge (\dot{x} \varphi x) \to \dot{x}\, \varphi x \wedge \psi x$$

durch den unübersichtlichen Zeichenkomplex

$$(\tilde{x}\,\varphi x \to \overline{\psi x}) \to ((\tilde{x}\,\varphi x \to \psi x) \to \tilde{x}\,\overline{\psi x})$$

wiedergegeben werden.

Der stärkste Mengel der Fregeschen Deduktionsmethode ist, dass er sich konsequent auf die Anwendung von drei Schlussregeln

1) Abtrennungsregel (Modus ponens)

2) Kettenschluss

3) "FREGEs Regel 8", die sich so andeuten lässt:

$$\frac{\vdash p \wedge q \to r \qquad \vdash p \wedge \bar{q} \to r}{\vdash p \to r}$$

beschränkt und dass also die einzelnen logischen Sätze nicht im Sinne einer das Schliessen erleichternden Metalogik als Schlussregel verwendet werden[1]. Es erfordert oft ermüdende Umformungen, die vom Wesentlichen ablenken und den Beweisgedanken um keinen Schritt fördern, bis die Formeln so präpariert sind, dass mit einer der Regeln geschlossen werden kann. Schliesslich ist die Fregesche Konstituierung der Arithmetik dadurch schlecht übersehbar, dass FREGE keine Scheidung zwischen allgemeinen logischen Sätzen und solchen, die sich im engeren Sinne auf die Konstituierung beziehen, durchgeführt hat.

Unsere Ableitbarkeitsbeweise in §§ 6-8 nehmen, da sie diese Mängel zu vermeiden suchen, nur einen geringen Bruchteil des Raumes ein, den die Darstellung der Fregeschen Beweise erfordert. Der Beweis der Eineindeutigkeit entfernt sich zudem deshalb, weil wir nicht die Fregesche Definition des Korrelators[2] beibehalten, sondern die Russellsche

1) HILBERT-ACKERMANN, Theoretische Logik, p. 24; J. HERBRAND, Recherches sur la théorie de la démonstration. Warszawa 1930

2) FREGE definiert nämlich:
R ist ein Korrelator von α und β, wenn die Relation R α in β und die Umkehrung von R β in α abbildet, oder genauer: wenn R mehreindeutig ist und jedem Element aus α (mindestens) ein Element aus β zuordnet und wenn die Um-

angenommen haben, ziemlich weit von den Fregeschen Gedankengängen. Dadurch wird es möglich, diese Beweise, zu denen FREGE 40 Seiten benötigt, auf 3 Seiten darzustellen. In dem konstruktiven Beweis für die Existenz eines Nachfolgers haben wir uns näher an den Fregeschen Gedankengang angeschlossen.

§ 16. Die Interpretation der Arithmetik in den Principia Mathematica.

In den beiden folgenden Paragraphen soll die Interpretation der Arithmetik, die WHITEHEAD und RUSSELL in den Principia Mathematica angegeben haben, mit unserer, die im wesentlichen mit der Fregeschen identisch ist, verglichen werden. Diesen Vergleich werden wir relativ zu unserer Logik durchführen. Daraus ergibt sich, dass wir die zahlreichen Komplizierungen, unter denen die arithmetischen Begriffe und Sätze in den PM wegen der Typenvorschriften leiden, ausser acht lassen.

kehrung von R mehreindeutig ist und jedem Element aus β (mindestens) ein Element aus α zuordnet.

symbolisiert:

$$\alpha >\!\mathrm{R}\!< \beta =_{df} \mathrm{R} \varepsilon \mathrm{cls} \to 1 \wedge (a \varepsilon \alpha \to_a \dot{b}\ b \varepsilon \beta \wedge aRb)$$
$$\wedge \breve{\mathrm{R}} \varepsilon \mathrm{cls} \to 1 \wedge (a \varepsilon \beta \to_a \dot{b}\ b \varepsilon \alpha \wedge a\breve{R}b)$$

Diese Definition ist zwar mit D4.1 nicht äquivalent; aber die Abweichung ist ohne Einfluss auf die Existenz eines Korrelators und daher auch ohne Einfluss auf die Begriffe Gleichmächtigkeit und Kardinalzahl. Es gilt nämlich:

1) wenn ein Korrelator von α und β im Sinne von D4.1 existiert, so existiert auch ein Fregescher Korrelator von α und β, und

2) umgekehrt.

Nachweis von 1): jeder Korrelator im Sinne von D4.1 ist ein Fregescher; von 2): man beschränke den Vorbereich des Fregeschen Korrelators auf α, den Nachbereich auf β, so erhält man einen Korrelator im Sinne von D4.1

Nach dieser Festsetzung können wir über die Whitehead-Russellsche Interpretation der Arithmetik Folgendes sagen:

Der Begriff der Gleichmächtigkeit in den PM (*73.01. 02) ist mit unserem identisch.

Der Begriff der Kardinalzahl in den PM (*100.01.02) ist mit unserem identisch.

Die 0 der PM (*54.01) ist wegen L5.13 mit unserer 0 identisch.

Dagegen weicht die Definition der Vorgängerrelation von unserer Definition ab. Die Definition der PM können wir folgendermassen anschreiben[1]):

D16.1. $n + 1 =_{df} \hat{\xi}\, \dot{\alpha}\, \dot{x}\ Kz'\alpha = n \wedge x \sim\varepsilon \alpha \wedge \xi = \alpha \cup [x]$

Es wird also nicht die Vorgängerrelation definiert, sondern sofort festgesetzt, was unter dem Nachfolger von n verstanden werden soll. Aus D16.1 ergibt sich jedoch als Äquivalent der PM zu unserer Vorgängerrelation die Relation $\hat{n}\hat{m}\ n+1 = m$; wir wollen sie mit Vr ("Russellsche Vorgängerrelation") bezeichnen:

D16.2. $Vr =_{df} \hat{n}\hat{m}\ n+1 = m$

Die Menge der natürlichen Zahlen wird in den PM(*120 .01) wie bei uns als die Nachkommenschaft der 0 eingeführt; nur sind die natürlichen Zahlen der PM die Nachkommenschaft der 0 hinsichtlich der Relation Vr, während die natürlichen Zahlen bei uns die Nachkommenschaft der 0 hin-

1)In den PM wird zwar n+1 nicht explizit definiert. D16.1 ergibt sich jedoch (bei Verwendung unserer Logik) als Satz aus der Russellschen Definition der Summe zweier Kardinalzahlen:

$*110.02 \quad n +_c m =_{df} \hat{\xi}\, \dot{\alpha}\, \dot{\beta}\, Kz'\alpha = n \wedge Kz'\beta = m \wedge \xi\, glm\, \alpha + \beta$

Hieraus ergibt sich nämlich zunächst der Satz:

$\vdash \quad n +_c m = \hat{\xi}\ \dot{\alpha}\, \dot{\beta}\, Kz'\alpha = n \wedge Kz'\beta = m \wedge \alpha \cap \beta = \Lambda \wedge \xi = \alpha \cup \beta$

und substituiert man in ihm m/ 1, so erhält man wegen $\vdash \quad \beta = 1 \leftrightarrow \dot{x}\ \beta = [x]$ (*101.29) und $\vdash \alpha \cap [x] = \Lambda \leftrightarrow x \sim\varepsilon \alpha$:

$\vdash \quad n +_c 1 = \hat{\xi}\, \dot{\alpha}\, \dot{x}\ Kz'\alpha = n \wedge x \sim\varepsilon \alpha \wedge \xi = \alpha \cup [x]$.

sichtlich der Relation Vg sind.

Wie sieht nun der Beweis dafür aus, dass diese drei Konstanten 0, Vr, $\mathscr{N}_{Vr}$'0 ein Modell der Arithmetik bilden?

Aus der Definition der Relation Vr ergibt sich unmittelbar ihre Mehrseindeutigkeit und die Existenz eines Vr-Nachfolgers zu jedem Element des Feldes:

L16.1. $\vdash$ Vr ε cls $\rightarrow$ 1

L16.2. $\vdash$ n ε C'Vr $\rightarrow$ $\dot{\text{m}}$ nVrm

Das Erfülltsein der Axiome A1.2.3 des A-AS I(x R) ergibt sich also unmittelbar aus den Definitionen der drei Konstanten. Als wesentliche Aufgabe bleibt nur der Beweis dafür, dass A4 befriedigt wird. Dabei ist folgende Schwierigkeit zu überwinden:

Der Satz L16.2 lässt die Möglichkeit offen, dass der Vr-Nachfolger eines Elementes n die Nullmenge von Mengen $\Lambda_\varkappa$ ist. Dieser Fall würde eintreten, wenn es keine Mengen mit mehr als n Elementen gäbe. Alle weiteren Vr-Nachfolger wären dann ebenfalls mit $\Lambda_\varkappa$ identisch. Um zu zeigen, dass dieser Fall ausgeschlossen ist, um also

L16.3. $\vdash$ n ε $\mathscr{N}_{Vr}$'0 $\rightarrow$ $\dot{\alpha}$ α ε n+1

nachzuweisen, genügt es zu beweisen, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Menge gibt, die Element von n ist[2]. Diese Aussage, die symbolisiert so lautet:

UA. n ε $\mathscr{N}_{Vr}$'0 $\rightarrow_n$ $\dot{\alpha}$ α ε n

hat RUSSELL als "Unendlichkeitsaxiom" (Axiom of Infinity) bezeichnet. Dieses Unendlichkeitsaxiom sagt in der Russellschen Interpretation aus, dass es in einem[3] festen Typus zu jeder natürlichen Zahl n mindestens eine Menge mit n Elementen gibt. Diese Aussage lässt sich in einer

2) Da nämlich bei der Interpretation der arithmetischen Grundbegriffe in den PM, da die Existenz des n+1 trivial ist, (1) $\vdash$ n ε $\mathscr{N}_{Vr}$'0 $\rightarrow$ n+1 ε $\mathscr{N}_{Vr}$'0 gilt und (2) durch Einsetzung in UA der Satz $\vdash$ n+1 ε $\mathscr{N}_{Vr}$'0 $\rightarrow$ $\dot{\alpha}$ $\alpha\varepsilon$ n+1 gewonnen werden kann. Denn aus (1) und (2) folgt durch Kettenschluss L16.3.

Logik, die durch Typenvorschriften belastet ist, nicht beweisen, und musste daher von RUSSELL unter die logischen Axiome aufgenommen werden. In einer Logik wie der unseren, in der die Forderung, dass alle Elemente einer Menge typengleich sind, nicht erhoben wird, lässt sich das "Axiom" jedoch leicht, etwa auf dem folgenden Weg beweisen.

Beweis von UA.

Wir führen einen Induktionsbeweis, auf Grund der verschärften Form des Induktionssatzes (S_A51, vgl. auch § 14) und zeigen also:

1) $\vdash \dot{\alpha}\alpha\varepsilon 0$

2) $\vdash n\varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \wedge (\dot{\alpha}\alpha\varepsilon n) \to \dot{\alpha}\alpha\varepsilon n+1$

Die Behauptung 1) folgt aus L5.13, wonach $\vdash \Lambda\varepsilon 0$. Es bleibt also 2) zu beweisen:

Als eine Menge mit nicht nur endlich vielen Elementen benutzen wir die Nachkommenschaft der Nullmenge Λ hinsichtlich der Relation

$$P = \hat{m}\hat{n}\ n = [m] .$$

Man kann nun leicht Folgendes zeigen: Die Eigenschaft $f\mathcal{J}$:

$f\mathcal{J} =_{df}$ jede eineindeutige Abbildung von $\mathcal{J}$ in sich bildet $\mathcal{J}$ so ab, dass alle Elemente von $\mathcal{J}$ Bildelemente sind

kommt

a) der Menge $\mathcal{N}_P'\Lambda$ nicht zu; denn $\mathcal{N}_P'\Lambda$ wird durch P eineindeutig so in sich abgebildet, dass das Element Λ nicht Bildelement ist.

b) wenn $n\varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0$, jeder Menge α zu, für die $\alpha\varepsilon n$ gilt (durch vollständige Induktion nachzuweisen).

Da weiter die Eigenschaft $f\mathcal{J}$ mit einer Menge $\mathcal{J}$ auch jeder Teilmenge von $\mathcal{J}$ zukommt, gilt:

$$\vdash n\varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \wedge \alpha\varepsilon n \to \mathcal{N}_P'\Lambda \sim \subset \alpha \qquad (1)$$

3) oder, was nach *125.24.25 damit äquivalent ist: in jedem Typus.

und also:

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \wedge \alpha \varepsilon n \to \dot{x}\, x \varepsilon \mathcal{N}_{P}'\Lambda \wedge x \sim\varepsilon \alpha \qquad (2)$$

$$\vdash \to \dot{x}\, x \sim\varepsilon \alpha \qquad (3)$$

Da nun nach D16.1

$$\vdash \alpha \varepsilon n \wedge x \sim\varepsilon \alpha \to \alpha \cup [x] \varepsilon n+1$$

gilt, folgt aus (3):

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \wedge (\dot{\alpha}\, \alpha \varepsilon n) \to \dot{\beta}\, \beta \varepsilon n+1 \qquad (4).$$

Aus UA lässt sich nun weiter mit Hilfe vollständiger Induktion ohne Schwierigkeit der Satz:

L16.4. $\vdash \mathcal{N}_{Vr}'0 \subset kz$

beweisen.

Statt jetzt zu zeigen, dass das Axiom A4 des A-AS I erfüllt ist, ist es bequemer, den Nachweis für das dritte und vierte Axiom des PEANO AS zu führen, die zusammen nach L11.1 im Rahmen der übrigen Axiome mit dem Axiom der Wiederholungsfreiheit äquivalent sind. Dass P4 erfüllt ist, ist trivial; denn aus D16.1 folgt unmittelbar, dass für jedes n die Nullmenge nicht Element von n+1 ist, und daher gilt:

L16.5. $\vdash n+1 \neq 0$

Um P3, d.h.

$$\vdash n\, m \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \wedge n+1 = m+1 \to n = m$$

zu beweisen, genügt es wegen L16.3.4

$$\vdash (\dot{\gamma}\, \gamma \varepsilon Kz'\alpha + 1) \wedge Kz'\alpha + 1 = Kz'\beta + 1 \to Kz'\alpha = Kz'\beta$$

nachzuweisen. Der Beweis macht keine Schwierigkeiten; man findet ihn PM *120.31.

Anmerkungen zum § 16.

(1) Man könnte sagen, dass der Beweis, dass die in den PM angegebenen Konstanten ein Modell der Arithmetik bilden, sehr viel einfacher sei, als der entsprechende Nachweis für die von uns angegebenen Konstanten, da sich ja - wenn man das für den Russellschen Nachweis am besten geeignete

BEANO-AS der Arithmetik zugrunde legt - alle Axiome bis auf P3 unmittelbar aus den Definitionen der Konstanten ergäben. Darauf ist zu erwidern, dass

1) der Beweis für P3 (der den Beweis für UA umfasst), vollständig ausgeführt, aber ziemlich langwierig ist.

2) unser Ableitbarkeitsbeweis den Vorzug hat, dass er die Existenz des Nachfolgers einer natürlichen Zahl konstruktiv beweist, indem nachgewiesen wird, dass auf eine natürliche Zahl n die Kardinalzahl $Kz'\overrightarrow{Vg}_*'n$ folgt.

(2) Wir haben in diesem Paragraphen skizziert, wie der Ableitbarkeitsbeweis der Russellschen Interpretation in unserer Logik aussehen würde. Ein Wort sei darüber gesagt, welche Schwierigkeiten auftreten, sobald man sich, wie es in den PM geschehen ist, mit Typenvorschriften belastet. An zwei Punkten haben wir gegen diese Typenvorschriften verstossen:

1) bei der Benutzung des Satzes

$$\vdash \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta \longleftrightarrow Kz'\alpha = Kz'\beta$$

2) beim Beweis des UA, wo wir von der typenmässig aufsteigenden Menge $\mathfrak{M}_p'\Lambda$ Gebrauch gemacht haben[4]).

Zum Verstoss 1) sei noch Folgendes bemerkt: Auf der Russellschen Basis lässt sich von L4.5 nur

$$\alpha\,\mathrm{glm}\,\beta \rightarrow Kz'\alpha = Kz'\beta \qquad *100.321$$

dagegen wegen der Typentheorie

$$Kz'\alpha = Kz'\beta \rightarrow \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta$$

nicht allgemein beweisen. Ist nämlich die Gleichmächtigkeitsrelation nicht homogen, d.h. ist sie so festgelegt, dass der Typus der Vorderglieder ein anderer als der Typus der Hinterglieder ist, so darf in

4) Bei dem Ableitbarkeitsbeweis für unsere Interpretation sind es die beiden gleichen Verstösse. Nur dass der Verstoss 2) beim Beweis der Existenz eines Nachfolgers auftritt, wo davon Gebrauch gemacht wird, dass in nVgm für m die Konstante $Kz'\overrightarrow{Vg}_*'n$ eingesetzt werden darf, die typenmässig um 2 höher liegt.

$$\gamma\,\mathrm{glm}\,\alpha \leftrightarrow_{\gamma} \gamma\,\mathrm{glm}\,\beta$$

für γ nicht α substituiert werden; man kann also hieraus nicht auf

$$\alpha\,\mathrm{glm}\,\alpha \leftrightarrow \alpha\,\mathrm{glm}\,\beta$$

schliessen. Vgl. PM II p. 15. - L4.51 gilt auch bei RUSSELL allgemein: *100.31. Die Äquivalenzen L4.52.53 können nur in der Pfeilrichtung von links nach rechts bewiesen werden (*100.45).

Man darf die Tatsache, dass es nicht gestattet ist, für zwei Mengen die Gleichmächtigkeit zu behaupten, wenn ihre Kardinalzahlen dieselben sind, wohl als eine fatale Konsequenz der Typentheorie bezeichnen.

§ 17. Vergleich der Interpretation der Arithmetik in den Principia Mathematica mit unserer.

In §§ 6-8 haben wir nachgewiesen, dass die von uns im Anschluss an FREGE definierten Konstanten

$$0,\ \mathrm{Vg},\ \mathcal{N}_{\mathrm{Vg}}{}'0$$

ein Modell der Arithmetik bilden, und in § 16 haben wir angedeutet, wie man für die in den PM angegebenen Konstanten

$$0,\ \mathrm{Vr},\ \mathcal{N}_{\mathrm{Vr}}{}'0$$

die Modelleigenschaft beweisen kann. Sind diese beiden Modelle überhaupt von einander verschieden?

Da das Element Null in beiden Modellen dasselbe ist und die "natürlichen Zahlen" der PM dann und nur dann mit unseren übereinstimmen, wenn die Vorgängerrelation der PM mit unserer übereinstimmt, kommt bei der Entscheidung der Frage alles darauf an, wie sich die beiden Vorgängerrelationen zu einander verhalten.

Nun ist zunächst klar, dass Vg und Vr nicht generell übereinstimmen; denn wenn n keine Kardinalzahl ist, so existiert das Vg'n nicht, während n+1 mit der Nullmenge von Mengen identisch ist. Es wird also höchstens gelingen,

die Identität von Vg und Vr über der Menge der Kardinalzahlen zu beweisen. Es wäre nun verhältnismässig einfach, diese Identität von Vg und Vr so nachzuweisen, dass man sie

1) für die endlichen Kardinalzahlen, etwa unsere natürlichen Zahlen

2) für die unendlichen Kardinalzahlen (d.h die Kardinalzahlen, für die n = n+1 ist)

nachweist Um aber zu zeigen, dass durch 1) und 2) alle Kardinalzahlen erfasst werden, braucht man bekanntlich das Auswahlaxiom. Da die Vergleichung der Modelle der Arithmetik aber mit Sätzen über die endlichen Kardinalzahlen durchführbar sein muss, wäre die Verwendung des Auswahlaxioms ein Schönheitsfehler. Wir gehen daher einen etwas komplizierteren Weg und beweisen den folgenden Satz:

L17.1 $\vdash (\mathcal{N}_{Vg}{}'0) \upharpoonright Vg = (\mathcal{N}_{Vr}{}'0) \upharpoonright Vr$

Den Beweis von L17 1 stützen wir auf die beiden Sätze:

L17.2 $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}{}'0 \;.\!\rightarrow\!.\; nVgm \leftrightarrow nVrm$

L17.3 $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}{}'0 \;.\!\rightarrow\!.\; nVgm \leftrightarrow nVrm$

Beweis von L17.2.

L17.2 ist, da nach L6.1 und L8.1 zu jedem Element der Vg-Nachkommenschaft von 0 genau ein Nachfolger ($Nf'n =_{df} \breve{V}g'n$) existiert, äquivalent mit:

$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}{}'0 \rightarrow Nf'n = n+1$

und diese Aussage lässt sich äquivalent[1]) aufteilen in

1) $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}{}'0 \rightarrow n\ Vg\ n+1$

2) $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}{}'0 \rightarrow (nVgu \wedge nVgv \rightarrow_{uv} u = v)$

Von diesen beiden Teilaussagen bedarf die zweite wegen L6.2 keines Beweises mehr; die erste lässt sich gemäss L5.21 weiter äquivalent aufteilen in

1a) $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}{}'0 \rightarrow \dot{\alpha}\ Kz'\alpha = n+1 \wedge \dot{x}\ x \varepsilon \alpha$

1)wegen $\vdash \breve{R}'n = a \leftrightarrow nRa \wedge (nRu \wedge nRv \rightarrow_{uv} u = v)$

1b) $\vdash n \varepsilon \mathscr{N}_{Vg}'0 \to (Kz'\alpha = n+1 \wedge x \varepsilon \alpha \to_{x\alpha} Kz'\alpha - [x] = n)$

Beweis der Teilaussage 1a).
Um zeigen zu können, dass zu jedem Element n der Vg-Nachkommenschaft der 0 eine nicht-leere Menge mit der Kardinalzahl n+1 existiert, beweisen wir zunächst als Hilfssatz den folgenden Satz:

L17.4. $\vdash n \varepsilon \mathscr{N}_{Vg}'0 \to Kz'\overrightarrow{Vg}_{po}'n = n$

Beweis von L17.4.
Statt L17.4 beweisen wir den nach L7.1 äquivalenten Satz:

$$\vdash n \varepsilon \mathscr{N}_{Vg}'0 \to Kz'(\overrightarrow{Vg}_{*}'n - [n]) = n \qquad (1')$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion (verschärfte Form, S_A51, vgl. auch § 14):

Dass der Menge $\hat{\xi}\, Kz'(\overrightarrow{Vg}_{*}'\xi - [\xi]) = \xi$ die 0 angehört, folgt daraus, dass $\vdash (\overrightarrow{Vg}_{*}'0 - [0]) = \Lambda$ gilt; es bleibt also zu zeigen, dass sie für die Elemente der Vg-Nachkommenschaft von 0 Vg-erblich ist:

$$\vdash u \varepsilon \mathscr{N}_{Vg}'0 \wedge Kz'(\overrightarrow{Vg}_{*}'u - [u]) = u \wedge uVgv \to Kz'(\overrightarrow{Vg}_{*}'v - [v]) = v \qquad (2')$$

Es gilt nun der Satz[2]:

$$\vdash Kz'\alpha - [x] = u \wedge uVgv \wedge x \varepsilon \alpha \to Kz'\alpha = v \qquad (3')$$

In ihm substituiere man $\alpha / \overrightarrow{Vg}_{*}'u$, x/u und lasse den allgemeingültigen Term $\vdash u \varepsilon \overrightarrow{Vg}_{*}'u$ weg. Aus dem Ergebnis und und dem Satze

$$\vdash u \varepsilon \mathscr{N}_{Vg}'0 \wedge uVgv \to Kz'(\overrightarrow{Vg}_{*}'v - [v]) = Kz'\overrightarrow{Vg}_{*}'u \qquad (4')$$

(Beweiszeile (4) aus dem Beweis von L8.1) bilde man das logische Produkt. Man erhält (2').

Beweis der Teilaussage 1a), Fortsetzung
Auf Grund von L7.1 gilt:

2) denn $\vdash Kz'\alpha = n \wedge x \varepsilon \alpha \to Kz'\alpha - [x]\, Vg\, n$ (folgt aus D5.2)

daher: $\vdash Kz'\alpha = n \wedge x \varepsilon \alpha \wedge mVgn \to Kz'\alpha - [x]\, Vg\, n \wedge mVgn$

$\vdash \to Kz'\alpha - [x] = m$ wegen L7.2.

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}\text{'}0 \rightarrow n \sim\varepsilon \overrightarrow{Vg}_{po}\text{'}n \qquad (1)$$

Aus L17.4 und (1) ergibt sich wegen des Satzes

$$\vdash Kz\text{'}\alpha = n \wedge x \sim\varepsilon \alpha \rightarrow Kz\text{'}\alpha \cup [x] = n+1 \ ,$$

der eine unschwer zu beweisende Konsequenz aus D16.1 ist:

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}\text{'}0 \rightarrow Kz\text{'}(\overrightarrow{Vg}_{po}\text{'}n \cup [n]) = n+1 \qquad (2)$$

und, da $\vdash n \varepsilon (\overrightarrow{Vg}_{po}\text{'}n \cup [n])$ gilt:

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}\text{'}0 \rightarrow \dot{\alpha}\, Kz\text{'}\alpha = n+1 \wedge \acute{x}\, x \varepsilon \alpha \qquad (3)$$

w.z.b.w.

Beweis der Teilaussage 1b).

Da nach 1a) n+1 eine Kardinalzahl ist, wenn n Element der Vg-Nachkommenschaft von 0 ist (L4.41), und nach L4.53

$$\vdash n+1 \varepsilon\ kz \rightarrow (Kz\text{'}\alpha = n+1 \leftrightarrow \alpha \varepsilon\ n+1)$$

gilt, ist 1b) äquivalent mit der folgenden Aussage:

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}\text{'}0 \rightarrow (Kz\text{'}\beta = n \wedge y \sim\varepsilon \beta \wedge \alpha = \beta \cup [y] \wedge x \varepsilon \alpha \rightarrow Kz\text{'}\alpha - [x] = n) \qquad (7)$$

Der Kern dieser Behauptung ist:

$$\vdash y \sim\varepsilon \beta \wedge x \varepsilon \beta \cup [y] \rightarrow \beta\ glm(\beta \cup [y]) - [x] \qquad (8)$$

Dieser Satz ist zunächst trivial in dem Falle, dass $x = y$; ist $x \neq y$, so ist die Relation $I \upharpoonright (\beta - [x]) \cup x \downarrow y$ ein Gleichmächtigkeitskorrelator von β und $(\beta \cup [y]) - [x]$. Denn diese Relation ist eineindeutig ($I \upharpoonright (\beta - [x])$ ist nach *72.17 und *71.29, $x \downarrow y$ nach *72.182 eineindeutig; und nach *71.242 ist die Vereinigung eineindeutiger Relationen, deren Vor- und Nachbereiche fremd sind, wieder eineindeutig), ihr Vorbereich ist $(\beta - [x]) \cup [x]$, d.h. β, und ihr Nachbereich ist $(\beta \cup [y]) - [x]$.

Aus (8) folgt nun auf Grund von L4.5:

$$\vdash y \sim\varepsilon \beta \wedge x \varepsilon \beta \cup [y] \rightarrow Kz\text{'}\beta = Kz\text{'}(\beta \cup [y]) - [x] \qquad (9)$$

und hieraus:

$$\vdash y \sim\varepsilon \beta \wedge \alpha = \beta \cup [y] \wedge x \varepsilon \alpha \rightarrow Kz\text{'}\beta = Kz\text{'}\alpha - [x] \qquad (10)$$

und:

$$\vdash Kz'\beta = n \wedge y_{\sim}\varepsilon\beta \wedge \alpha = \beta \cup [y] \wedge x \varepsilon \alpha \rightarrow Kz'\alpha - [x] = n \quad (11)$$

Da (11) gilt, gilt a fortiori (7). -

Damit ist der Beweis von L17.2 abgeschlossen. Als ein Folgerungssatz, der sich auf Grund von L17.2 durch vollständige Induktion ergibt, führen wir den Satz an:

L17.21. $\vdash \mathcal{N}_{Vr}'0 < \mathcal{N}_{Vg}'0$

Inhaltlich gesprochen besagt dieser Satz, dass die Menge der natürlichen Zahlen der PM in der Menge der natürlichen Zahlen, wie wir sie definiert haben, enthalten ist.

Beweis von L17.3.

Der Beweis von L17.3 verläuft analog dem Beweis von L17.2. Wir formen die Aussage von L17.3 zunächst äquivalent um. Sie ist, da auf Grund von L16.1.2 zu jedem Element n der Vr-Nachkommenschaft von 0 genau ein Element n+1 existiert, äquivalent mit

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow Nf'n = n+1$$

Dieser Satz lässt sich wieder äquivalent aufspalten in die beiden Aussagen

1) $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow n\ Vg\ n+1$

2) $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow (nVgu \wedge nVgv \rightarrow_{uv} u = v)$

von denen wir wegen der Gültigkeit von L6.2 nur die erste zu beweisen brauchen. Diese spalten wir wieder in die beiden Teilaussagen auf:

1a) $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow \dot{\alpha}\ Kz'\alpha = n+1 \wedge \dot{x}\ x \varepsilon \alpha$

1b) $\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow (Kz'\alpha = n+1 \wedge x \varepsilon \alpha \rightarrow_{x\alpha} Kz'\alpha - [x] = n)$

Beweis der Teilaussage 1a).

Die Teilaussage 1a) basiert auf dem in § 16 bewiesenen sog. Unendlichkeitsaxiom UA. Denn

$$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow \dot{\alpha}\ \alpha \varepsilon n+1 \quad (L16.3) \qquad (1)$$

und

$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow n+1 \varepsilon kz$ (Aus L16.4, da n+1 gemäss L16.1.2 existiert) (2)

liefern:

$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow \mathring{\alpha}\, Kz'\alpha = n+1$ (3)

Da nun nach L16.5 $\vdash n+1 \neq 0$ und nach L5.14 $\vdash Kz'\alpha \neq 0 \rightarrow_\alpha \mathring{x}\, x \varepsilon \alpha$ gilt, folgt aus (3)[3]:

$\vdash n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0 \rightarrow \mathring{\alpha}\, Kz'\alpha = n+1 \wedge \mathring{x}\, x \varepsilon \alpha$ (4)

Beweis der Teilaussage 1b).
Der Beweis der Teilaussage 1b) lässt sich aus dem Beweis von L17.2 übernehmen. Dort wurde nämlich im Beweis der entsprechenden Teilaussage 1b) das Implikans $n \varepsilon \mathcal{N}_{Vg}'0$ nur insoweit benutzt, als es gewährleistet, dass n+1 eine Kardinalzahl ist. Diese Tatsache wird jetzt gemäss (2) auch durch $n \varepsilon \mathcal{N}_{Vr}'0$ gesichert. -

In Analogie zu L17.21 lässt sich durch vollständige Induktion auf Grund von L17.3 der Satz:

L17.31. $\vdash \mathcal{N}_{Vg}'0 \subset \mathcal{N}_{Vr}'0$

beweisen. Die beiden Sätze L17.21.31 lassen sich dann zu dem Satz vereinigen, dass die Menge der natürlichen Zahlen der PM mit der Menge der natürlichen Zahlen, wie wir sie definiert haben, identisch ist:

L17.5. $\vdash \mathcal{N}_{Vr}'0 = \mathcal{N}_{Vg}'0$. -

Durch die Sätze L17.2.3.5 ist der Hauptsatz dieses Paragraphen L17.1 bewiesen.

Aus den Sätzen L17.1.5 folgt nun zwar nicht, dass die beiden Modelle so, wie wir sie im Anfang dieses Paragraphen angegeben haben, identisch sind. Es wurde darauf verzichtet[4], die Übereinstimmung von Vg und Vr ausserhalb

3) nach dem Schluss-Schema $\vdash (\mathring{x}\, \varphi x) \wedge (\varphi x \rightarrow_x \psi x) \rightarrow \mathring{x}\, \varphi x \wedge \psi$

4) Es durfte darauf verzichtet werden, da es, wie wir aus den Überlegungen des § 13 wissen, vom logischen Standpunkt gesehen ein Mangel des A-AS I (und der äquivalenten ASe) ist, dass es nicht fordert, dass das Feld von R auf α beschränkt ist.

des Bereiches der "endlichen Kardinalzahlen" zu beweisen, wir haben aber gezeigt, dass die beiden Modelle

$$0, (\mathcal{N}_{Vg}{}'0)1\ Vg,\ \mathcal{N}_{Vg}{}'0 \quad 5)$$

und $$0, (\mathcal{N}_{Vr}{}'0)1\ Vr,\ \mathcal{N}_{Vr}{}'0$$

identisch sind.

Dies Ergebnis lässt sich einfacher aussprechen, wenn wir die Progressionsgestalt des AS der Arithmetik, A-AS II, zugrunde legen. Die zu unseren Konstanten gehörige Progression ist $(\mathcal{N}_{Vg}{}'0)1\ Vg$, die zu den Konstanten der PM gehörige $(\mathcal{N}_{Vr}{}'0)1\ Vr$. Wir haben also gezeigt, dass die von uns, im Anschluss an FREGE, angegebene Progression mit der in den PM angegebenen identisch ist.

5) Statt $\mathcal{N}_{Vg}{}'0$ (bzw. $\mathcal{N}_{Vr}{}'0$) darf man nach S_A5 auch $\mathcal{N}_{(\mathcal{N}_{Vg}{}'0)1\ Vg}{}'0$ (bzw. $\mathcal{N}_{(\mathcal{N}_{Vr}{}'0)1Vr}{}'0$) schreiben. Es gilt also, dass $\mathcal{N}_{Vg}{}'0$ (bzw. $\mathcal{N}_{Vr}{}'0$) in der Tat die Nachkommenschaft hinsichtlich der Relation $(\mathcal{N}_{Vg}{}'0)1Vg$ (bzw. $(\mathcal{N}_{Vr}{}'0)1Vr$) ist.

Anhang I.

Die R-Vorfahr-Relationen.

Die Sätze dieses Anhangs sind im Text der Arbeit mit S_A... zitiert.

Der Anhang I soll dazu dienen 1) unsere Definitionen der R-Vorfahr-Relationen, die von denen der PM (*90 und *91) etwas abweichen, und die mit den Definitionen zusammenhängenden Abkürzungen mitzuteilen, 2) die im Text der Arbeit benutzten Sätze über die R-Vorfahr-Relationen zusammenzustellen, 3) von einigen tieferliegenden Sätzen über die R-Vorfahr-Relationen elementare Beweise zu geben.

D1. α ist eine R-erbliche Menge $=_{df} u \in \alpha \wedge uRv \rightarrow_{uv} v \in \alpha$

D2. $aR_*z =_{df} a \in \alpha \wedge (u \in \alpha \wedge uRv \rightarrow_{uv} v \in \alpha) \rightarrow_{\alpha} z \in \alpha$

"a heisst ein R-Vorfahr von z, wenn z in jeder R-erblichen Menge liegt, in der a liegt"; statt >a ist ein R-Vorfahr von z< sagen wir auch >z ist in endlich vielen R-Schritten von a aus erreichbar<[1]. Es ist zu beachten, dass nach D2 jedes Ding hinsichtlich jeder beliebigen Relation (als deren Argument es sinnvoll auftreten kann) sein eigener R-Vorfahr ist und dass durch die Redeweise von der Erreichbarkeit in endlich vielen Schritten nicht ausgeschlossen werden soll, dass die Anzahl der Schritte Null ist: R_* ist eine totalreflexive Relation[2]:

S1. $\vdash aR_*a$

In den PM tritt im Definiens von D2 die Forderung $a \in C'R$ hinzu (*90.01). Dadurch wird die Härte vermieden, dass aR_*a auch für Dinge gilt, die nicht dem Felde von R angehören. In den PM ist R_* daher nur reflexiv[2], und es gilt statt S1 nur:

1) Zur inhaltlichen Deutung vgl. R. CARNAP, Logistik 23a.
2) R. CARNAP, Logistik 16c.

$\vdash a \varepsilon C'R \rightarrow aR_* a$

Wir ziehen D2 wegen des bequemeren Anschlusses an den Satz von der vollständigen Induktion vor.

Für die Gesamtheit der Elemente, zu denen a ein R-Vorfahr ist, benutzen wir das Symbol

D3. $\mathcal{N}_R'a =_{df} \overleftarrow{R}_*'a$

$\mathcal{N}_R'a$ lies: "die R-Nachkommenschaft von a".

D4. $aR_{po}z =_{df} (aRb \rightarrow_b b \varepsilon \alpha) \wedge (u \varepsilon \alpha \wedge uRv \rightarrow_{uv} v \varepsilon \alpha) \rightarrow_\alpha z \varepsilon \alpha$

"a heisst ein echter R-Vorfahr von z, wenn z in jeder R-erblichen Menge liegt, in der die R-Nachfolger von a liegen"; statt >a ist ein echter R-Vorfahr von z< sagen wir auch >z ist in endlich, von Null verschieden vielen R-Schritten von a aus erreichbar<[1]). Die Definition D4 ist zu der Definition von R_{po} in den PM (+91.05) äquivalent.

S11. $\vdash R_* = R_{po} \cup I$ S2. $\vdash R_* | R = R_{po}$

S12. $\vdash R_* \wedge J \subset R_{po}$ S21. $\vdash R_* | R \subset R_*$

S13. $\vdash R \subset R_{po}$ S22. $\vdash R | R_* \subset R_{po}$

S14. $\vdash \mathcal{D}'R_{po} \subset \mathcal{D}'R$ S23. $\vdash R_{po} | R \subset R_{po}$

S3. $\vdash R \varepsilon cls \rightarrow 1 . \rightarrow . \breve{R} | R_{po} \subset R_*$

S31. $\vdash R \varepsilon 1 \rightarrow cls . \rightarrow . R_{po} | \breve{R} \subset R_*$

S4. $\vdash R \varepsilon cls \rightarrow 1 \wedge y,z \varepsilon \mathcal{N}_R'x \rightarrow yR_{po}z \vee y = z \vee zR_{po}y$

"ist R mehreindeutig, so ist R_{po} für die R-Nachkommenschaft eines beliebigen Elementes zusammenhängend"(Definition von >zusammenhängend<: *202.01).

S5. $\vdash \mathcal{N}_R'x = \mathcal{N}_{(\mathcal{N}_R'x)\upharpoonright R}'x$

"die Nachkommenschaft eines Elementes x in bezug auf eine Relation R ist identisch mit der Nachkommenschaft von x in bezug auf die Relation $(\mathcal{N}_R'x)\upharpoonright R$".

S51. $\vdash a \varepsilon \alpha \wedge (aR_* u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \rightarrow_{uv} v \varepsilon \alpha) \rightarrow_\alpha (aR_* z \rightarrow_z z \varepsilon \alpha)$

S6. $\vdash (\mathscr{A}_R{}'x)1R_{po} = ((\mathscr{A}_R{}'x)1R)_{po}$

Beweis von S4.
Da nach S11 zR_*y mit $y = z \vee zR_{po}y$ äquivalent ist, genügt es

$$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge y.z \varepsilon \mathscr{A}_R{}'x \to yR_{po}z \vee zR_*y \qquad (1)$$

zu beweisen. Nun folgt aus D2, wenn man für α die Menge $\hat{\xi}\ yR_{po}\xi \vee \xi R_*y$ einsetzt:

$$\vdash xR_*z \to (yR_{po}x \vee xR_*y) \wedge (\hat{\xi}\ yR_{po}\xi \vee \xi R_*y \text{ ist R-erblich}) \to yR_{po}z \vee zR_*y \qquad (2)$$

Wir werden zeigen, dass die R-Erblichkeit der angegebenen Menge aus der Mehreindeutigkeit von R folgt:

$$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \to (yR_{po}u \vee uR_*y) \wedge uRv \to yR_{po}v \vee vR_*y \qquad (3)$$

Mit dieser Tatsache ergibt sich (1) aus (2), wenn man die erste Klammer durch die stärkere Forderung xR_*y und die zweite Klammer gemäss (3) durch $R \varepsilon cls \to 1$ ersetzt.

Beweis von (3).
Zum Beweis von (3) zeigen wir

1) $\vdash yR_{po}u \wedge uRv \to yR_{po}v$

2) $\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge uR_*y \wedge uRv \to yR_{po}v \wedge vR_*y$

Durch logische Addition dieser beiden Formeln erhält man

$$\vdash (R \varepsilon cls \to 1 \wedge uR_*y \wedge uRv) \vee (yR_{po}u \wedge uRv) \to yR_{po}v \vee vR_*y$$

und hieraus ergibt sich (3) durch Verstärken des Implikans zu

$$R \varepsilon cls \to 1 \wedge (yR_{po}u \vee uR_*y) \wedge uRv \ .$$

1) folgt aus dem Satze S23

2) ergibt sich aus den beiden Sätzen:

$\vdash u = y \wedge uRv \to yR_{po}v$ (S13)

$\vdash R \varepsilon cls \to 1 \wedge uR_{po}y \wedge uRv \to vR_*y$ (S3)

durch logische Addition erhält man aus ihnen nämlich:

$\vdash (R \varepsilon cls \to 1 \wedge uR_{po}y \wedge uRv) \vee (u = y \wedge uRv) \to yR_{po}v \vee vR_*y$

und hierin hat man nur das Implikans zu dem Ausdruck

$R \varepsilon cls \to 1 \wedge (uR_{po}y \vee u = y) \wedge uRv$

zu verstärken, der mit

$R \varepsilon cls \to 1 \wedge uR_*y \wedge uRv$

äquivalent ist (S11).

Beweis von S5.

S5 lautet ausführlicher geschrieben:

$$\vdash [x \varepsilon \alpha \wedge (u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} v \varepsilon \alpha) \to_{\alpha} z \varepsilon \alpha]$$
$$\leftrightarrow_z [x \varepsilon \alpha \wedge (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} v \varepsilon \alpha) \to_{\alpha} z \varepsilon \alpha]$$

$\vdash \mathfrak{N}_{(\mathfrak{N}_R{}'x) \upharpoonright R}{}'x \subset \mathfrak{N}_R{}'x$ ist trivial. Es bleibt die Umkehrung zu zeigen:

Durch logische Multiplikation der Sätze:

$\vdash (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} v \varepsilon \alpha) \to (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} v \varepsilon \alpha)$

$\vdash xR_*u \wedge uRv \to xR_*v$ (S21)

erhält man:

$$\vdash (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} v \varepsilon \alpha) \to (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} xR_*v \wedge v \varepsilon \alpha) \qquad (1)$$

Aus D2 ergibt sich nun, wenn man für α die Menge $\hat{\xi}\, xR_* \xi \wedge \xi \varepsilon \alpha$ einsetzt:

$$\vdash xR_*z \to [xR_*x \wedge x \varepsilon \alpha \wedge (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} xR_*v \wedge v \varepsilon \alpha) \to xR_*z \wedge z \varepsilon \alpha] \qquad (2)$$

In dieser Formel darf man xR_*x wegen S1 und im Implikat xR_*z weglassen; ersetzt man dann die runde Klammer nach (1), so erhält man die nachzuweisende Behauptung.

Beweis von S6.

S6 behauptet:

$\vdash xR_*y \wedge yR_{po}z \leftrightarrow y((\mathfrak{N}_R{}'x) \upharpoonright R)_{po}z$

$\vdash y((\breve{\mathcal{N}}_R{}'x)\restriction R)_{po}z \to yR_{po}z$ ist trivial; ferner folgt

$\vdash \quad \to xR_*y$ daraus, dass wegen $\vdash D'R_{po} \subset D'R$: $y \varepsilon \breve{\mathcal{N}}_R{}'x$, also xR_*y gilt. Damit ist die Gültigkeit der Äquivalenz, von rechts nach links gelesen, erwiesen. -

Es bleibt also die Umkehrung:

$$\vdash xR_*y \wedge yR_{po}z \to \big[(xR_*y \wedge yRb \to_b b \varepsilon \alpha) \wedge (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} v \varepsilon \alpha) \to_\alpha z \varepsilon \alpha\big] \qquad (1)$$

zu beweisen. Substituiert man in D4 $\alpha / \hat{\xi}\, xR_*\xi \wedge \xi \varepsilon \alpha$, so erhält man:

$$\vdash yR_{po}z \to \big[(yRb \to_b xR_*b \wedge b \varepsilon \alpha) \wedge (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} xR_*v \wedge v \varepsilon \alpha) \to_\alpha xR_*z \wedge z \varepsilon \alpha\big] \qquad (2)$$

Man füge im Implikans xR_*y hinzu und ersetze die zweite runde Klammer gemäss Zeile (1) des Beweises von S5; dann erhält man:

$$\vdash xR_*y \wedge yR_{po}z \to \big[(yRb \to_b xR_*b \wedge b \varepsilon \alpha) \wedge (xR_*u \wedge u \varepsilon \alpha \wedge uRv \to_{uv} v \varepsilon \alpha) \to_\alpha xR_*z \wedge z \varepsilon \alpha\big] \qquad (3)$$

Jetzt darf man in der ersten runden Klammer im Implikans xR_*y hinzufügen und im Implikat xR_*b weglassen, da wegen S21

$$xR_*y \wedge yRb \to xR_*b$$

allgemeingültig ist. Ferner darf im Implikat der Formel (3) xR_*z weggelassen werden. So ergibt sich (1). -

Anhang II.

Zusammenstellung der verwendeten Symbole und Abkürzungen.

I. Die elementaren logischen Konstanten.

$p \wedge q$ p und q

$p \vee q$ p oder q

$p \to q$ wenn p, so q

$\overline{p}$, bzw. $\sim p$ es ist nicht wahr, dass p

$p \leftrightarrow q =_{df} (p \to q) \wedge (q \to p)$ p äquivalent q

$\vdash p$ p ist eine Aussage der Logik

$\tilde{x}\varphi x$ für alle x gilt φx

$\dot{x}\varphi x$ es existiert ein x, für das φx gilt

$\wedge$ bindet stärker als $\vee$, $\vee$ bindet stärker als $\to$, $\to$ bindet stärker als $\leftrightarrow$. Der Hauptpfeil einer Implikation ist (zur Ersparung von Klammern) bisweilen in Punkte eingeschlossen: $.\to.$. Allheitszeichen sind gewöhnlich durch Indizes an den Spitzen der Implikations- und Äquivalenzzeichen ersetzt: $\to_x$, $\leftrightarrow_{uv}$, u.s.f. (*10).

$x = y =_{df} \varphi x \to_\varphi \varphi y$ x ist mit y identisch (*13)

$x \neq y =_{df} \overline{x = y}$ x ist nicht mit y identisch

$E!(\iota x \varphi x) =_{df} (\dot{x}\varphi x) \wedge (\varphi y \wedge \varphi z \to_{yz} y = z)$ es existiert genau ein x, für das φx gilt (*14)

$\psi(\iota x \varphi x) =_{df} (\dot{x}\varphi x \wedge \psi x) \wedge (\varphi y \wedge \varphi z \to_{yz} y = z)$ für das einzige x, für das φx gilt, gilt ψx

II. Konstanten der Klassen- und Relationenlogik.

$\hat{x}\varphi x$ die Gesamtheit (Klasse) der x, für die φx gilt

$\hat{x}\hat{y}\varphi xy$ die Gesamtheit der Paare x,y, für die φxy gilt (Relation) (*20, *21)

$x \varepsilon \alpha$ x ist Element der Klasse α (*20)

$\alpha \subset \beta =_{df} x \varepsilon \alpha \rightarrow_x x \varepsilon \beta$ α ist in β enthalten (*22)

$\alpha \cup \beta =_{df} \hat{x}\, x \varepsilon \alpha \vee x \varepsilon \beta$ Vereinigungsklasse von α und β

$\alpha \cap \beta =_{df} \hat{x}\, x \varepsilon \alpha \wedge x \varepsilon \beta$ Durchschnittsklasse von α und β

$\alpha - \beta =_{df} \hat{x}\, x \varepsilon \alpha \wedge \overline{x \varepsilon \beta}$

$R \subset S =_{df} xRy \rightarrow_{xy} xSy$ R ist in S enthalten (*23)

$R \cup S =_{df} \hat{x}\hat{y}\, xRy \vee xSy$ Vereinigungsrelation von R und S

$R \cap S =_{df} \hat{x}\hat{y}\, xRy \wedge xSy$ Durchschnittsrelation von R und S

$R - S =_{df} \hat{x}\hat{y}\, xRy \wedge \overline{xSy}$

$\Lambda =_{df} \hat{x}\, x \neq x$ Nullmenge (*24)

$[x] =_{df} \hat{z}\, z = x$ die Klasse, die x als einziges Element enthält, die Einerklasse von x

$[x,y] =_{df} [x] \cup [y]$ (R.CARNAP, Logistik 19a)

$R|S =_{df} \hat{x}\hat{z}\, \dot{y}\, xRy \wedge ySz$ Verkettung von R und S (*34)

$\alpha \restriction R =_{df} \hat{x}\hat{y}\, x \varepsilon \alpha \wedge xRy$ R vorbeschränkt auf α (*35)

$R \restriction \alpha =_{df} \hat{x}\hat{y}\, x.y \varepsilon \alpha \wedge xRy$ R beschränkt auf α (*35)

$x \downarrow y =_{df} \hat{u}\hat{v}\, u = x \wedge v = y$ die Relation, die aus dem einzigen Paar x,y besteht (*55)

$R \varepsilon cls \rightarrow 1 =_{df} uRv \wedge uRw \rightarrow_{uvw} v = w$ R ist mehreindeutig (*70)

$R \varepsilon 1 \rightarrow cls =_{df} vRu \wedge wRu \rightarrow_{uvw} v = w$ R ist einmehrdeutig

$R \varepsilon 1 \rightarrow 1 =_{df} R \varepsilon cls \rightarrow 1 \wedge R \varepsilon 1 \rightarrow cls$ R ist eineindeutig

$\breve{R} =_{df} \hat{x}\hat{y}\, yRx$ die Konverse von R (*31)

$\vec{R}'x =_{df} \hat{y}\, yRx$ die Klasse der R-Vorgänger von x (*32)

$\overleftarrow{R}'x =_{df} \hat{y}\, xRy$ die Klasse der R-Nachfolger von x (*32)

$D'R =_{df} \hat{x}\, \dot{y}\, xRy$ Vorbereich von R (*33)

$\breve{D}'R =_{df} \hat{y}\, \dot{x}\, xRy$ Nachbereich von R (*33)

$C'R =_{df} D'R \cup \breve{D}'R$ Feld von R (*33)

$R'x =_{df} (\iota y\ yRx)$ das R von x, oder: der R-Vorgänger von x (*30)

R_* , R_{po}, $\mathscr{C}_R'x$ siehe Anhang I

$I =_{df} \hat{x}\hat{y}\ x = y$ Identität (*50)

$J =_{df} \hat{x}\hat{y}\ x \neq y$ Nicht-Identität (*50)

$xBR =_{df} x \in D'R - \mathscr{C}'R$ x ist ein Anfangsglied von R (*93)

III. Die in der Arbeit definierten Symbole.

>R<	D4.1	A-AS I(x R α)	§ 1
glm	D4.2	A-AS II'(x R α)	§ 13
Kz	D4.3	A-AS II(R)	§ 13
kz	D4.4	A-AS II+(R)	§ 13
O	D5.1	D-AS (1, φ, N)	§ 9
Vg	D5.2	D-AS I(1, φ, N)	§ 9
nz	D5.3	D-AS II(1, φ, N)	§ 13
prog	D13.1	P-AS I(O, a^+, N_o)	§ 12
n+1	D16.1	P-AS II(x R α)	§ 12
Vr	D16.2	A1,...	§ 1
UA	§ 16	D1,...	§ 9
		P1,...	§ 12

IV. Abkürzungen.

Die Principia Mathematica von WHITEHEAD und RUSSELL (s. Literatur-Verzeichnis) werden mit >PM< abgekürzt; die Paragraphen der PM werden mit *1, *2, u.s.f., die Definitionen und Sätze der PM mit *1.1, *1.11, u.s.f. zitiert.

Die Verweise S_A1, S_A11, u.s.f. beziehen sich auf die Sätze des Anhang I.

Unter dem logischen Produkt zweier Implikationen $p \to q$ und $r \to s$ wird die Implikation $p \wedge r \to q \wedge s$ verstanden.

Unter der logischen Summe zweier Implikationen $p \to q$ und $r \to s$ wird die Implikation $p \vee r \to q \vee s$ verstanden.

Im übrigen sei wegen der Bezeichnung der logischen Konstanten und der Schlussweisen auf H.SCHOLZ, Logistik (s. Literatur-Verzeichnis) verwiesen.

Literaturverzeichnis

BEHMANN,H.: Zu den Widersprüchen der Logik und der Mengenlehre. Jahresberichte D.M.V., Bd.40, 1931

CARNAP,R.: Abriss der Logistik, Wien 1929

DEDEKIND,R.: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1887

FREGE,G.: Begriffsschrift.Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle 1879

- Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884 (Neudruck 1934)
- Grundgesetze der Arithmetik. Jena, I 1893, II 1903

HILBERT,D.u.ACKERMANN,W.: Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin 1928

HILBERT,D.u.BERNAYS,P.: Grundlagen der Mathematik I. Berlin 1934

LANDAU,E.: Grundlagen der Analysis. Leipzig 1930

PEANO,G.: Arithmetices Principia,nova methodo exposita. Turin 1889

- Formulaire de Mathématiques. Turin. In mehreren Ausgaben von 1895 bis 1908

RUSSELL,B.: The Principles of Mathematics I.Cambridge 1903

- Introduction to Mathematical Philosophy. London 1919

SCHOLZ,H.: Logistik. Münster i.W. 1932/33 (Herausgeber: Die Mathematische Arbeitsgemeinschaft an der Universität Münster)

- u. BACHMANN,F.: Die logischen Grundlagen der Arithmetik im Anschluss an Frege und Dedekind. Münster i.W. 1932/33 (Herausgeber: Die Mathematische Arbeitsgemeinschaft an der Universität Münster)

WHITEHEAD,A.N.u.RUSSELL,B.: Principia Mathematica. Cambridge I $^{2}1925$, II $^{2}1927$, III $^{2}1927$

Lebenslauf

Am 11. 2. 1909 wurde ich als Sohn des damaligen Oberlehrers Hans Bachmann und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Büchsel, in Wernigerode a.H. geboren. Ich besuchte in Münster i.W. drei Jahre lang eine Vorschule und trat dann Ostern 1918 in das Staatliche Schillergymnasium ein, das ich Ostern 1927 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Von 1927 bis 1931 studierte ich Mathematik, Naturwissenschaften und Philosophie. Ich liess mich zunächst in Münster immatrikulieren, ging dann im Wintersemester 1929 für drei Semester nach Berlin und kehrte dann nach Münster zurück. Meine wissenschaftliche Ausbildung erhielt ich bei den Herren Professoren Behnke, Benecke, Hammerstein, Hettner, Hopf, Kratzer, v. Mises, Neder, Planck, Prüfer, Gerh. Schmidt, Erh. Schmidt, Scholz, Schur, Spranger, v. Ubisch. Die Anregung zur Beschäftigung mit den Problemen der mathematischen Grundlagenforschung und der modernen Logik verdanke ich Herrn Professor Scholz, dessen Assistent ich seit Januar 1931 bin.

Friedrich Bachmann